

le sinus de cet angle divisé par son cosinus, B est le sinus, & A le cosinus d'un angle dont la valeur est $h\sqrt{aa+bb}$ + $g \times f \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}$, & dont le rayon $\sqrt{AA+BB}$ est $= \frac{(aa+bb)^{\frac{g}{2}} \times c}{-hf \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}}$. Dans cette expression c (Art. xxx.) est l'ordonnée d'une logarithmique dont la sous-tangente $= 1$, & dont l'abscisse négative $= -hf \left\{ \frac{adb-bda}{aa+bb} \right\}$, c'est-à-dire que cette ordonnée est plus petite que l'unité.

Donc enfin $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ peut se ramener à $A+B\sqrt{-1}$, puisque pour avoir A & B il ne faut que prendre un cercle dont le rayon soit égal à la valeur trouvée & toute réelle de $\sqrt{AA+BB}$; & prendre sur la circonférence de ce cercle un angle égal à la valeur aussi trouvée de $f \left\{ \frac{AdB-BdA}{Aa+BB} \right\}$; $\frac{B}{A}$ fera la tangente de cet angle; B en fera le sinus, & A le cosinus. Donc, &c.

On fait donc réduire à la forme $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels.

$$1^{\circ}. a+b\sqrt{-1} + g+h\sqrt{-1}$$

$$2^{\circ}. (a+b\sqrt{-1}) \times (g+h\sqrt{-1})$$

$$3^{\circ}. \frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$$

$$4^{\circ}. \frac{g+h\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}$$

Donc une quantité algébrique quelconque composée de tant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours se ramener à $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels. C. Q. F. P.

L X X I.

Par le moyen du Théorème précédent il sera toujours

nous avons vu se ramener à $A+B\sqrt{-1}$ (Art. LXX. N^o. 3.)

Nous avons donc déjà $\sqrt[6]{\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}} \cdot (m+n\sqrt{-1})} \times$
 $(a+c\sqrt{-1})$. De même $m+n\sqrt{-1} = m+n\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$,
 & $a+b\sqrt{-1} = a+b\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$, & $g+h\sqrt{-1} =$
 $g+h\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$. On aura donc en faisant les mêmes raison-
 nemens que ci-dessus $(p+q\sqrt{-1}) \times (m'+n'\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{(p'+q'\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}}{a+b\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}}$: or cette quantité se rapporte à
 $a = p'$
 $b = q'$
 $g = \frac{1}{2}$
 $h = 0$

Donc ce premier membre se ramene aussi à $a'+c'\sqrt{-1}$;
 on aura donc $(a'+c'\sqrt{-1}) \cdot (a+c\sqrt{-1})$. Or
 nous avons vu (Art. LXX. N^o. 2.) que $(a+b\sqrt{-1}) \cdot$
 $(g+h\sqrt{-1})$ se ramenoit à $A+B\sqrt{-1}$: donc la
 proposée entiere se ramenera à $A+B\sqrt{-1}$.

L X X V.

La seconde proposition, savoir que toute racine ima-
 ginaire d'une équation quelconque peut s'exprimer par
 $A+B\sqrt{-1}$, paroît une suite nécessaire de la premiere ;
 cependant elle a besoin d'une preuve particuliere. Car
 quoique nous ayons démontré que toute quantité imagi-
 naire peut se réduire à $A+B\sqrt{-1}$, on pouroit douter
 qu'il en fût de même des racines imaginaires des équations

Démonstra-
 tion de la se-
 conde Partie.

tions, parce qu'on pouroit croire que du moins dans certains cas ces racines n'auroient aucune expression analytique possible. Mais les Théorèmes suivans ne laisseront aucune difficulté sur cette seconde proposition.

L X X V I.

Lemmes
préparatoires
à cette démonstration.

LEMME 1. Dans une courbe dont z & u sont les coordonnées, on peut supposer $z = Du^k + Cu^{k+p}$, &c. u étant fort petite, quoique finie; & dans ce cas u étant soit positive, soit négative, cette serie representera la valeur de z .

DÉMONST. Soit $z^m + bz^{m-1}u + \dots + Kz + gu + F = 0$, l'équation de la courbe: je dis d'abord qu'on aura aisément la valeur de z en u , lorsque u est fort petite. Car ayant disposé cette équation sur le Parallelogramme de M. Newton, ou sur le Triangle analytique de M. l'Abbé de Gua, de la maniere enseignée par M. Cramer (Analyse des lignes courbes, Chap. III. p. 54.) on trouvera chaque terme de l'équation de z en u l'un après l'autre, & on aura $z = Du^k + Cu^{k+p} +$, &c. Cela posé, je dis que si u est fort petite, cette serie representera la valeur de z , soit que u soit positive, soit que u soit négative.

Car 1°. lorsque u est positive & fort petite, il est évident que la valeur de z en u sera une suite extrêmement convergente, dont les termes commencent, au moins à une certaine distance du premier, à ne contenir que des puissances