DE LA CONTROVERSE ENTRE MRS. LEIBNIZ ET BERNOULLI SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES

Commentatio 168 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [5] (1749), 1751, p. 139—179

Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie que les vérités qu'elle renferme, semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Geometrie, les Mathematiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; et quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, la raison en est apparemment qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce qu'on avance dans les parties pures de la Mathematique, en dévelopant devant les yeux de tout le monde les difficultés et même les contradictions auxquelles les sentimens des Mathematiciens sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentimens puissent être fort differens sur des questions qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverses manieres d'envisager les objets et de les ramener à des idées precises peuvent donner lieu à des controverses réelles, on a toujours prétendu que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout sujet de dispute, et qu'il ne s'y trouvoit rien dont on ne fût en état de démontrer ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathematique pure, on sera bien surpris d'apprendre qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées que, de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant, si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent être qu'apparentes, et qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité, quoique nous ne sachions point de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce litteraire[1]) entre M. LEIBNIZ et M. JEAN BERNOULLI. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous sommes pour la pluspart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là dessus, quoique l'un et l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, et qu'ils fussent également éloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions que ces deux Grands hommes se reprochoient, étoient réelles, et point du tout du nombre de celles qui ne paroissent telles qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. BERNOULLI et de M. LEIBNIZ; j'y ajouterai ensuite tous les argumens dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment, et enfin je détaillerai les objections qu'on peut faire, tant contre les argumens que contre chaque sentiment même, et je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions auxquelles l'un et l'autre de ces deux sentimens est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger combien il doit être difficile de découvrir la vérité et de la garantir contre toutes les objections, aprés que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

---

1) *Virorum celeberr.* GOT. GUL. LEIBNITII *et* IOHAN. BERNOULLII *commercium philosophicum et mathematicum*, t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716. Lausannae et Genevae 1745, p. 269, 276, 278, 282, 287, 292, 296, 298, 303, 305, 312, 315. A. G.

SENTIMENT DE M. BERNOULLI

M. Bernoulli soutint que les logarithmes des nombres négatifs étoient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou que le logarithme du nombre négatif $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainsi le sentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

M. Leibniz a donné occasion à cette déclaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança, dans la CXC Epitre du *Commerce*[1]), que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison, c. à d. le logarithme de -1, qui est l'exposant de cette raison, étoit imaginaire. Là dessus, M. Bernoulli déclara, dans la CXCIII Epitre[2]), qu'il n'étoit point de même avis, et qu'il croyoit même que les logarithmes des nombres négatifs étoient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris positivement. M. Bernoulli fortifia aussi son sentiment par les raisons suivantes.

1. RAISON

Pour prouver que $l-x = l+x$, quelque nombre qu'on marque par x, il recourt aux differentiels; et puisque le differentiel de $l-x$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de même que celui de $l+x$, il en conclut que ces quantités mêmes $l-x$ et $l+x$, dont les differentiels sont égaux, doivent être égales entr'elles, et partant qu'il est $l-x = l+x$.

2. RAISON

Cette raison est tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, soit VBM (Fig. 1, p. 198) une Logarithmique décrite sur l'axe OAP, qui est en même tems son asymtote. Soit la soutangente de cette Logarithmique qui est, comme on sait, constante, $=1$; et que l'appliquée fixe AB soit aussi $=1$. Cela posé, si l'on nomme une abscisse quelconque $AP = x$, prise depuis le point fixe A, et l'appliquée qui y répond $PM = y$, on sait que x exprime le logarithme de y, ou que $x = ly$.

1) L. c. p. 269. A. G.
2) L. c. p. 276. A. G.

Donc, prenant les differentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation differentielle $dx = \frac{dy}{y}$ ou $ydx = dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de y, M. BERNOULLI conclut de là que cette courbe VBM est accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche vbm, qui lui est égale et semblable, étant située de l'autre part de l'axe OP, de sorte que cet axe soit en même tems un diametre de la courbe entiere. Et partant, puisque la même abscisse AP répond également aux deux appliquées PM et Pm, dont l'une est la négative de l'autre, de sorte que posant $PM = y$ il est $Pm = -y$, il s'ensuit que x est aussi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conséquent $l-y = l+y$.

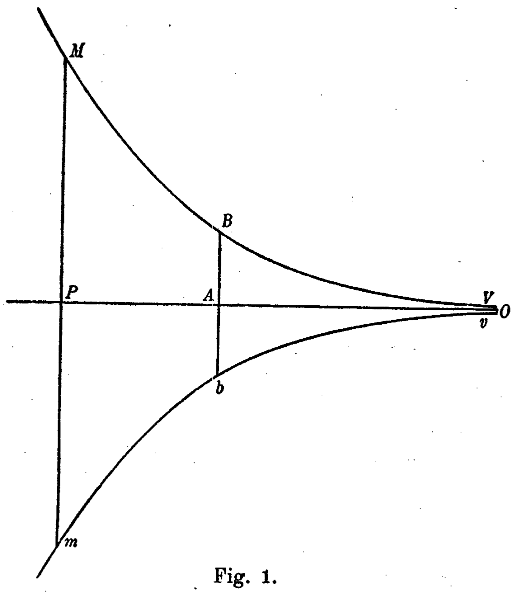

Fig. 1.

3. RAISON

Comme tout revient à prouver que la Logarithmique est composée de deux branches égales, situées de part et d'autre de l'asymtote OP, M. BERNOULLI apporte encore une autre raison qui est, qu'en considérant les courbes comprises dans cette équation plus générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, on est d'accord que toutes ces courbes, lorsque l'exposant n est un nombre impair, ont deux branches telles que l'axe sur lequel sont prises les abscisses x, en est un diametre. Donc il faut que cette propriété ait aussi lieu, si $n = 1$; or dans ce cas, on aura la Logarithmique de l'article précédent; d'où il s'ensuit donc que tant le logarithme de $PM = +y$ que le logarithme de $Pm = -y$ est le même $= AP = x$.

4. RAISON

Puisqu'il est certain, par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puissance quelconque p^n est égal au logarithme de la racine p multiplié par l'exposant n, ou que $lp^n = nlp$, il s'ensuit que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = nl(-a)$. Soit $n = 2$, et il sera $l(-a)^2 = 2l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2la$; d'où il s'ensuit que $2l(-a) = 2la$, et partant $l-a = l+a$. Cela se montre plus promtement de cette maniere: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il sera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2l-a = 2l+a$, et par conséquent $l-a = l+a$.

Toutes les autres raisons qu'on peut alléguer pour prouver ce sentiment, se réduisent aisément à une des quatre que je viens d'exposer. Je m'en vai donc étaler les objections qu'on fait contre ce sentiment, et les raisons dont il est appuyé.

1. OBJECTION

M. Leibniz opposa contre la premiere raison, que la régle de differentier le logarithme d'une quantité variable x, en divisant le differentiel de x par la quantité même x, n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se trompoit en posant le differentiel de $l-x$ égal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avouër que cette objection est non seulement extrèmement foible, n'étant soutenue par aucune raison valable, mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul differentiel des logarithmes. Car, comme ce calcul roule sur des quantités variables, c. à d. sur des quantités considérées en général, s'il n'étoit pas vrai généralement qu'il fût $d.\,lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x, soit positive ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette régle, la vérité du calcul differentiel étant fondée sur la généralité des régles qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte que voilà.

2. OBJECTION

M. Bernoulli voulant prouver par l'égalité des differentiels, qu'il étoit $l-x = l+x$, prouveroit par le même raisonnement que $l2x = lx$; car le differentiel de $l2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de lx. Et partant, si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l-x = l+x$, mais aussi que $l2x = lx$ et en général $lnx = lx$, quelque nombre que marque n; conséquence que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or on sait que lorsque les differentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage que ce que ces quantités variables diffèrent entr'elles d'une quantité constante; et on n'en sauroit conclure qu'elles fussent égales. Ainsi, quoique le differentiel de $x+a$ soit $=dx$ aussi bien que celui de x, la conséquence seroit bien fausse, si l'on en vouloit conclure que $x+a=x$. Par cette raison, il est donc clair que, puisque le differentiel de $l-x$ et de $l+x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l-x$ et $l+x$ ne diffèrent entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est également évident, vu que $l-x=l-1+lx$. Et de là on comprend aussi aisément que puisque $lnx=lx+ln$, le differentiel de lnx doit être égal au differentiel de lx. Il est vrai que M. BERNOULLI suppose $l-1=0$, de même qu'il est $l1=0$, de sorte qu'il seroit $l-x=lx+l-1=lx$. Mais comme c'est précisément ce que M. BERNOULLI veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

3. OBJECTION

On peut opposer la même chose contre la seconde raison de M. BERNOULLI, quand il veut prouver par l'équation differentielle de la Logarithmique $ydx=dy$, que cette courbe a deux branches semblables situées de part et d'autre de l'axe. Car, non seulement cette équation demeure la même, si l'on met $-y$ au lieu de y, mais aussi si l'on met $2y$, ou en général ny pour y; d'où il suivroit que cette courbe eût une infinité de branches, et que l'abscisse x fût le logarithme commun, non seulement de y et de $-y$, mais aussi de $2y$, et en général de ny, quelque nombre que soit n. Ainsi, par la même raison qu'on est en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera aussi l'existence des deux branches, que M. BERNOULLI veut établir.

4. OBJECTION

Cette objection est encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car, quoiqu'on puisse surement conclure l'existence d'un diametre d'une courbe, lorsque son équation entre les coordonnées x et y est telle qu'elle demeure inalterée, si l'on met $-y$ à la place de y, cependant ce critere n'est juste que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on sait qu'une équation differentielle est beaucoup plus générale que l'équation finie d'où elle a été tirée, et qu'elle renferme une infinité de courbes qui ne sont pas comprises dans l'équation finie. Ainsi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour differentielle $2ydy = adx$; mais cette même équation differentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en est de même de l'équation differentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, qui convient aussi bien à cette équation finie $x = lny$, qu'à celle-cy $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De là, il s'ensuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne considérant que son équation differentielle.

5. OBJECTION

Celle-cy regarde la troisieme raison qui est sans doute beaucoup plus forte. Car, si toutes les courbes comprises dans cette équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, sont douées d'un diametre, la même propriété doit avoir lieu, si $n = 1$, ce qui est le cas de la Logarithmique. Mais, puisque cette propriété n'est évidente, qu'entant qu'on considere les équations intégrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours assigner algébriquement hormis le cas $n = 1$, de même maniere qu'on doit excepter ce cas, lorsque la question roule sur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on sera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diametre. Donc, si l'on ne peut pas prouver par quelque autre raison, que la Logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dx = \frac{dy}{y^n}$ n'est pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'insuffisance, je ferai voir, même dans les courbes algébriques, des cas où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, et que néanmoins il en faut excepter un cas particulier.

Qu'on considere cette équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b + x)},$$

et on ne doutera pas de conclure que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diametre, puisqu'en réduisant l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b + x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les exposans de y sont des nombres pairs. Cependant, quelque sure que paroisse cette conclusion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = 0$; car alors l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 x}$ étant délivrée des signes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant

$$y^4 - 2axyy - 4aaxy + aaxx - a^3x = 0,$$

laquelle, à cause du terme $4aaxy$, est destituée de diametre. De tout cela, il s'ensuit donc que cet argument de M. BERNOULLI n'est pas assez rigoureux pour démontrer son sentiment.

6. OBJECTION

Je passe à la quatrieme raison de M. BERNOULLI, qui est sans doute la plus forte; car on ne sauroit révoquer en doute aucun article qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'Analyse et de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute que leurs logarithmes ne soient égaux, c. à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite, il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l-a$ et $l(+a)^2 = 2l+a$; et partant, il sera sans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles et, par conséquent, il sera $l-a = la$, tout comme M. BERNOULLI le soutient.

Mais si ce raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences que personne, et encore moins M. BERNOULLI, ne sauroit accorder; car on prouvera de la même façon que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels que ceux des nombres négatifs. Car, il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, et de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, et partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le systeme de M. BERNOULLI, non seulement $l-1 = l1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$, $l-\sqrt{-1} = 0$ et $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or, M. BERNOULLI ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ étoit $=0$, toute cette belle découverte seroit fausse, par laquelle il a fait voir que le rayon est à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc, posant le rapport du diametre à la circonference $= 1:\pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde, s'il étoit

$l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vrai que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la 4[me] raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent, on ne peut pas dire que le sentiment de M. BERNOULLI soit suffisamment prouvé.

Il est ici fort étonnant que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. BERNOULLI, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras insurmontables, et même en des contradictions. Car, si l'on soutient que $l-a = l+a$ ou $l-1 = l+1 = 0$, on est obligé d'avouër qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l-1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi, en se déclarant pour le sentiment de M. BERNOULLI, on tombe en contradiction avec des vérités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. BERNOULLI soit faux, et qu'il n'y ait point $l-1 = 0$; car c'est à quoi se réduit le sentiment de M. BERNOULLI; et on sera obligé d'accuser de fausseté quelcune des opérations sur lesquelles le raisonnement de la 4[me] raison est fondé; ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités démontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l-1 = \omega$, et s'il n'est pas $\omega = 0$, son double 2ω ne sera non plus $= 0$, or 2ω est le logarithme du quarré de -1, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne seroit plus $= 0$, ce qui est une nouvelle contradiction. De plus, $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l-x = lx + l-1 = lx - l-1$; il seroit donc $l-1 = -l-1$, sans qu'il fût $l-1 = 0$; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Soit donc qu'on dise l'une ou l'autre de ces deux choses, ou que le sentiment de M. BERNOULLI est vrai ou qu'il est faux, on se plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant, il faut absolument, ou que ce sentiment soit vrai ou qu'il soit faux, et il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de se tirer d'affaire et de sauver la vérité contre de si grandes contradictions? Je passe à l'examen du sentiment de M. LEIBNIZ.

SENTIMENT DE M. LEIBNIZ

M. Leibniz soutint que les logarithmes de tous les nombres négatifs, et à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, étoient imaginaires; ou, puisque $l-a = la + l-1$, *il soutint que* $l-1$ *étoit une quantité imaginaire.*

J'ai déjà remarqué que M. Leibniz soutenoit que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le systeme de M. Bernoulli servent à fortifier ce sentiment, et que les raisons alléguées pour le sentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant, on peut apporter des raisons particulieres pour confirmer le sentiment de M. Leibniz, qui seront le sujet de mon examen qui suit.

1. RAISON

Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ est égal à la somme de cette serie

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \text{etc.},$$

d'où l'on voit d'abord, que si $x = 0$, il doit être $l1 = 0$, maintenant pour avoir le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'où l'on obtient

$$l-1 = -2 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{5}\cdot 32 - \frac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.}$$

Or, il n'y a aucun doute que la somme de cette serie divergente ne sauroit être $= 0$; donc, il est certain que $l-1$ n'est pas $= 0$. Le logarithme de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair qu'il ne sauroit être réel, c. à d. ou positif ou négatif.

2. RAISON

Soit $y = lx$, et posant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2{,}71828\,1828459$, puisqu'il sera $yle = 1lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e qui est égale au nombre x, il est clair qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre négatif, et partant, pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y sauroit remplir cette condition. Et posant en géneral pour x un nombre négatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de y imaginaire.

3. RAISON

Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette serie infinie

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{y^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.},$$

qui est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de sorte que les objections tirées de la nature de suites divergentes, comme dans la premiere raison, ne trouvent pas lieu ici, ainsi le logarithme du nombre x étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

et partant, si y marque le logarithme de -1, ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

à laquelle, comme il est d'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent, il est certain que le logarithme de -1 n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres argumens par lesquels on peut confirmer le sentiment de M. LEIBNIZ, sont déjà contenus dans les objections faites contre le systeme de M. BERNOULLI. Cependant, ces trois raisons que je viens d'exposer, sont sujettes aux objections suivantes.

1. OBJECTION

Contre la premiere raison, on dira d'abord que l'accroissement continuel des termes qui sont tous négatifs, de cette suite

$$-2 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{5}\cdot 32 - \frac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.}$$

n'est pas une marque sure que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si cette serie geometrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \text{etc.}$$

donne pour le cas $x = -2$ celle-cy

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{etc.}$$

et pour le cas $x = -3$ celle-cy

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{etc.},$$

pourquoi, dira-t-on, ne seroit il pas possible que la somme d'une serie dont les termes croissent, ayant partout le même signe, ne fût $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere serie termes pour termes celle-cy:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

et on aura effectivement

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \text{etc.}$$

Donc, si la somme de cette serie est $= 0$, quelle absurdité seroit-il donc de soutenir qu'il fût aussi

$$0 = -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.},$$

et partant, la premiere raison n'est pas convaincante.

2. OBJECTION

La seconde raison est telle qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car, puisqu'il y a $x = e^y$ supposant y le logarithme du nombre x, toutes les fois que y est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouër qu'alors la valeur de e^y et partant aussi de x, est aussi bien négative qu'affirmative. Ainsi, si $\frac{m}{2n}$ est un logarithme, le nombre x qui lui répond étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, sera tant affirmatif que négatif; de sorte que dans ce cas, tant x que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne sont pas des nombres rationels, et par conséquent équivalens à des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'ensuit que le même logarithme qui convient au nombre positif $+x$, conviendra aussi au nombre négatif $-x$.

3. OBJECTION

La troisieme raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que, quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette serie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

ne sauroit jamais devenir négative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne sauroit répondre à un nombre négatif. Cependant, cette serie n'étant vraie qu'entant qu'elle découle de la formule finie e^y, les objections précedentes ont ici également lieu. Car, si e^y peut donner un nombre négatif, il importe fort peu, si la serie qui lui est égale en donne aussi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à considérer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui est aussi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la serie égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \text{etc.}$$

ne donne que sa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

M. Leibniz ne manqueroit pas de répondre à ces objections; et comme la premiere ne prouve pas le contraire de son sentiment, et qu'elle ne rend que douteuse la premiere raison, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raison, et de s'en tenir principalement aux autres. Car, au fond, la seconde objection ne détruit point son sentiment qui se réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'est pas $=0$; or la seconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que si e^y doit être $=-1$, l'exposant y ne sauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le signe radical puisse fournir une valeur négative. Car on conviendra aisément que, soit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zéro, ou un nombre négatif quelconque pour y, la valeur de la puissance e^y ne devient jamais $= -1$. Donc, si y n'est pas imaginaire, il faudroit qu'il fût $e^y = -1$ dans le cas $y = 0$. Mais dans ce cas s'évanouït toute ambiguïté de signes, qui pourroit avoir lieu à cause des signes radicaux, et il est indubitablement $e^0 = +1$. Et si l'on vouloit dire qu'on pût regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, et e^0 comme $\sqrt{e^0} = \sqrt{1}$, dont la valeur seroit aussi $= -1$, ce seroit une exception fort foible, puisque par la même raison on prouveroit que $-a = +a$; car, posant $a = a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2}$, on en tireroit aussi bien $a = -a$ que $a = +a$. Pour prévenir ces sortes de conséquences fausses, on n'a qu'à remarquer qu'une telle expression $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative et l'autre négative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ est réduite à ses plus petits termes, et que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainsi, comme la valeur de ces puissances, a^1, a^2, a^3, a^4, etc. n'est pas ambiguë, aussi celle-cy a^0 ne sauroit être ambiguë. Il est donc toujours $a^0 = +1$, ce qui suffit pour détruire la seconde objection; et la troisieme n'a aucune force qu'entant que la seconde subsiste.

Il paroit donc que le sentiment de M. Leibniz est mieux fondé, puisqu'il n'est pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il est

$$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1},$$

puisque M. Leibniz soutient que le logarithme de -1, et à plus forte raison celui de $\sqrt{-1}$, est imaginaire. Mais, en adoptant le sentiment de M. Leibniz, on se jette dans les difficultés et contradictions susmentionnées. Car, si $l-1$ étoit imaginaire, son double, c. à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$, le seroit aussi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on suppose $l+1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on se tourne, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de si grands obstacles à maintenir son parti, qu'on ne se sauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant, il semble que si l'un de ces deux sentimens est faux, l'autre doit nécessairement être vrai, et qu'il n'y a point de milieu à choisir. Voilà donc une question extrèmement importante, qui est d'établir la doctrine des logarithmes de telle sorte qu'elle ne soit plus assujettie à aucune contradiction.

Mais, aprés avoir bien pesé les contradictions qui se trouvent de part et d'autre, on sera porté à croire qu'une telle conciliation est une chose tout à fait impossible; et les ennemis des Mathematiques ne manqueront pas d'en tirer des conséquences fort facheuses contre la certitude de cette science. Car, quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les sciences, on conviendra aisément qu'il s'en faut beaucoup que les objections qu'ils ont apportées contre aucune science, approchent seulement, à l'egard de leur solidité, des objections que je viens d'exposer contre la doctrine des logarithmes.

Cependant, je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, et que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine que d'une seule idée peu juste; de sorte que, dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés et contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroitre, s'evanouïront d'abord, et alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections qui ont paru irrésolubles auparavant. Sans ce dévelopement, qui a pourtant été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne sai pas de quel oeil on devroit envisager la doctrine des logarithmes: d'un coté, on devroit avouër qu'elle est vraie et aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse; or de l'autre coté, on ne sauroit disconvenir que cette même doctrine seroit assujettie à des contradictions auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouër que la Mathematique, et même l'Analyse, renferme des mystéres incomprehensibles à nos esprits. Ensuite, si ces mystéres n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extrèmement dangereux de juger des choses dont on ne se peut former que des idées imparfaites: or il est bien certain que hormis les Mathematiques, le nombre des idées distinctes et complettes est fort petit.

DENOUEMENT DES DIFFICULTES PRECEDENTES

Il faut d'abord avouër que si l'idée que Mrs. Leibniz et Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, et que tous les Mathematiciens ont eue jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions que je viens de proposer. Or, l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fût défectueuse? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point: c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

THEOREME

Il y a toujours une infinité de logarithmes qui conviennent également à chaque nombre proposé; ou, si y marque le logarithme du nombre x, je dis que y renferme une infinité de valeurs différentes.

DEMONSTRATION

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant; ainsi, quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre sera $= 0{,}4342944819 \cdots y$.

Or, le fondement des logarithmes hyperboliques est que, si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1+\omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1+\omega)^2 = 2\omega$, $l(1+\omega)^3 = 3\omega$ et en général

$$l(1+\omega)^n = n\omega.$$

Mais, puisque ω est un nombre infiniment petit, il est evident que le nombre $(1+\omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé x, à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand et qu'on pose

$$x = (1+\omega)^n$$

et le logarithme de x, qui a été nommé $= y$, sera $y = n\omega$. Donc, pour exprimer y par x, la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ et $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre formule produira

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

D'où il est clair que la valeur de la formule $nx^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x, plus le nombre n sera pris grand, et si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraie valeur du logarithme de x. Or, comme il est certain que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs différentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre et ainsi de suite, il sera également certain que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differentes, puisque n est un nombre infini. Par conséquent, cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs differentes pour lx, de sorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là, il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant, on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0, seront des quantités imaginaires; de sorte que dans le calcul, on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{3}$ soient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1, ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son étenduë; et alors toutes les difficultés et contradictions rapportées cy-dessus disparoitront d'elles mêmes. Car, soient α, β, γ, δ, ε, ζ, etc. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0, et on comprendra aisément qu'il peut être $2l-1 = l+1$, quoique tous les logarithmes de -1 soient imaginaires; car, pour satisfaire à l'équation $2l-1 = l+1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de -1 se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De même, puisque $4l\sqrt{-1} = l+1$, chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la serie α, β, γ, δ, ε, ζ, etc. Ainsi, les égalités $2l-1=l+1$ et $4l\sqrt{-1}=l+1$ se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l-1=0$ ou $l\sqrt{-1}=0$, comme M. BERNOULLI a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problemes suivans.

PROBLEME 1

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre affirmatif proposé $+a$ quelconque.

SOLUTION

Puisque a est un nombre positif, il aura certainement un logarithme réel qui se trouve par les régles assés connuës. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a, et puisque $a=1\cdot a$, il sera $la=l1+A$: ou bien, chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A, donnera un logarithme du nombre proposé a; et pour trouver tous ses logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du theoreme en y mettant $x=1$, et on aura cette équation

$$y=n1^{\frac{1}{n}}-n,$$

qui se change en

$$1+\frac{y}{n}=1^{\frac{1}{n}},$$

et la délivrant des exposans rompus, on aura

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=1,$$

où n marque un nombre infini. Cette équation étant maintenant pour ainsi dire rationelle, chacune de ses racines donnera une valeur convenable pour y, c'est à dire un logarithme de $+1$. Or, pour trouver toutes les racines de cette équation, on sait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-1$, en supposant chaque facteur $=0$. Mais, en général, il est démontré que d'une telle formule $p^n - q^n$, un facteur quelconque est

$$p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2,$$

où λ marque un nombre entier quelconque et π l'angle de 180^0, ou la moitié de la circonference d'un cercle dont le rayon $=1$; de sorte que donnant à λ successivement toutes les valeurs possibles qui sont $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, etc., on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant, toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ seront comprises dans cette expression générale

$$p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right),$$

qui se trouve en posant

$$p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + qq = 0.$$

Donc, toutes les racines de notre équation trouvée $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$, posant $p = 1 + \frac{y}{n}$ et $q = 1$, seront contenuës dans cette expression générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or, puisque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit; il sera donc

$$\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

d'où il s'ensuit

$$1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1},$$

et partant

$$y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

On n'a qu'à substituer maintenant pour λ successivement toutes les valeurs déterminées qu'elle renferme, savoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. à l'infini; et tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs possibles de $l1$ seront

$$0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

Donc, tous les logarithmes du nombre proposé a, dont on sait déjà le logarithme réel A, seront

$$A, \quad A \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

C. Q. F. T.

De là, il est clair que chaque nombre positif n'a qu'un seul logarithme réel, et que tous ses autres logarithmes infinis sont imaginaires. Cependant, tous ces logarithmes imaginaires jouïssent de la même propriété que le réel, et on s'en pourroit servir également dans le calcul en observant les mêmes régles. Car, soient A, B, C, D, etc. les logarithmes réels des nombres positifs a, b, c, d, etc. de sorte qu'il soit en général

$$la = A \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}, \quad lb = B \pm 2\mu\pi\sqrt{-1}, \quad lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

Maintenant soit $c = ab$, et on sait qu'il sera $C = A + B$; or, prenant les logarithmes en général, on verra aussi que la somme des logarithmes des facteurs a, b est toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi\sqrt{-1}$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier qui peut résulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ et $\pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$. Or il est clair que mettant $A + B = C$, cette expression de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$. Le même accord se trouvera aussi dans la division, l'élevation aux puissances et l'extraction des racines, où l'on fait usage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines est toujours égal à l'exposant du signe radical, cette maniere d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage sur la maniere ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines; au lieu que par la methode ordinaire on ne trouve dans chaque cas qu'une racine, savoir la réelle et qui est en même tems positive; ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant négatifs qu'imaginaires.

PROBLEME 2

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre négatif quelconque $-a$.

SOLUTION

Puisque $-a = -1 \cdot a$, il sera $l{-a} = la + l{-1}$ et, prenant pour la le logarithme réel de a, on aura tous les logarithmes du nombre négatif $-a$, si l'on cherche tous les logarithmes de -1. Mais ayant vu que, mettant y

pour le logarithme du nombre x en général, il est $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ et partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc, y exprimera tous les logarithmes de -1, si l'on met $x = -1$, de sorte que tous les logarithmes de -1 seront les racines de cette équation

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

posant le nombre n infiniment grand.

Or on sait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$, toutes les racines se trouvent de la résolution de cette formule

$$p^2 - 2pq \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} + q^2 = 0,$$

prenant pour λ successivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que négatifs et partant, on aura

$$p = q\left(\cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right).$$

Donc, les racines de cette équation proposée $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$ seront toutes comprises dans cette formule générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n},$$

laquelle à cause de $n = \infty$ se change en

$$y = \pm (2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, mettant pour λ successivement toutes les valeurs qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 seront

$$\pm \pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 9\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

Donc, si nous posons $l + a = A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ seront:

$$A \pm \pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad A \pm 7\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'un nombre négatif quelconque sont imaginaires, et qu'il n'y a aucun nombre négatif dont un de ses logarithmes soit réel. M. Leibniz a eu donc raison de soutenir que les logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires. Cependant, puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car, quoiqu'il soit $l-1=\pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, le logarithme de son quarré sera $l(-1)^2=\pm 2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2l-1=l+1$, quoique nul des logarithmes de -1 se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$ et que p marque en général tous les nombres pairs et q tous les impairs entiers, et ayant en général

$$l+1=\pm p\pi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad l-1=\pm q\pi\sqrt{-1}$$

et

$$l+a=A\pm p\pi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad l-a=A\pm q\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que

$$l(-a)^2=2l-a=2A\pm 2q\pi\sqrt{-1}.$$

Or, $2q$ étant $=p$ et $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A\pm p\pi\sqrt{-1}$ est la formule générale des logarithmes de a^2; ainsi il est $l(-a)^2=la^2$ ou bien $2l-a=2l+a$, sans qu'il soit $l-a=l+a$; ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ et $-a$ n'avoient qu'un seul logarithme; car alors on auroit raison de conclure qu'il fût $l-a=l+a$, s'il étoit $2l-a=2l+a$. Mais, dès qu'on tombe d'accord que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fût auparavant, n'est plus juste, puisque pour qu'il soit $2l-a=2l+a$, il suffit que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l-a$ sont differentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il est

$$2l+a=2A\pm 2p\pi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 2l-a=2A\pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, et $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel est $= 2A$, sont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque sans en excepter zero. Cela remarqué, il est clair que toutes les valeurs de $2l-a$ sont comprises dans celles de la^2, aussi bien que celles de $2l+a$. Ainsi, quoiqu'on puisse dire que $2l-a = la^2$ et $2l+a = la^2$, prenant le signe de $=$ pour marquer que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ se rencontrent parmi les valeurs de la^2, on ne sauroit dire, à la vérité, qu'il soit $2l-a = 2l+a$. Néanmoins, comme dans les formules $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ et $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$ les nombres p et q sont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p et q les mêmes nombres. Ainsi pour faire ces multiplications dans toute leur étenduë, que p, p', p'', p''', etc. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux et q, q', q'', q''', etc. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux, ces duplications se feront de la maniere suivante:

$$\begin{array}{rl} l+a = & A \pm p\pi\sqrt{-1} \\ l+a = & A \pm p'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l+a = & 2A \pm (p+p')\pi\sqrt{-1}, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l-a = & A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ l-a = & A \pm q'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l-a = & 2A \pm (q+q')\pi\sqrt{-1}. \end{array}$$

Ici maintenant $p+p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques et $q+q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p+p'$ que $q+q'$ marquera un nombre pair quelconque; et partant, il sera $p+p' = q+q'$, donc $2l-a = 2l+a$. Par conséquent, dans ce sens, on pourra soutenir qu'il est $2l-a = 2l+a$, sans qu'il soit $l-a = l+a$. De même maniere, il sera

$$3l+a = 3A \pm (p+p'+p'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^3,$$
$$3l-a = 3A \pm (q+q'+q'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm q\pi\sqrt{-1} = l-a^3,$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs et convient par conséquent avec p; pareillement, $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs et convient avec q. Or, puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expression sera équivalente avec p; donc les quadruples seront

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4,$$
$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l-a^4.$$

Ainsi, cette maniere de trouver les logarithmes des puissances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puissances que des logarithmes, et toutes les objections rapportées cy-dessus n'ont plus aucune prise sur ces vérités démontrées. Le même accord s'observera aussi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai déveloper dans le probleme suivant.

PROBLEME 3

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a+b\sqrt{-1}$, où a et b sont des quantités réelles. Je pose maintenant

$$\sqrt{(aa+bb)}=c$$

et $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ seront le cosinus et le sinus d'un certain angle qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $=\varphi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle qui est sa mesure, le sinus total étant posé $=1$. On aura donc

$$a=c\cos\varphi \quad \text{et} \quad b=c\sin\varphi,$$

et la formule imaginaire dont il faut chercher tous les logarithmes, sera

$$a+b\sqrt{-1}=c(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$$

ou, puisque c est un nombre affirmatif, soit C son logarithme réel, et on aura

$$l(a+b\sqrt{-1})=C+l(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi).$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, laquelle étant mise pour x, ses logarithmes seront les valeurs de y tirées de cette équation

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n-x=0,$$

n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on sait que

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\varphi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$

et

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}$$

Or, puisque n est un nombre infini, il sera

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.},$$

d'où il est clair que

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi.$$

Nous aurons donc

$$p = 1 + \frac{y}{n} \quad \text{et} \quad q = \frac{1 + \varphi\sqrt{-1}}{n}$$

pour l'équation à resoudre $p^n - q^n = 0$. Mais, ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation est contenuë dans cette formule générale

$$p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right),$$

prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou négatifs, il sera pour notre cas

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

et parce que, à cause du nombre n infini, il est

$$\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

il sera

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

ce qui donne

$$y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

d'où tous les logarithmes de la formule $\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$ seront

$$\varphi\sqrt{-1},\quad (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1},\quad (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1},\quad (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

et les logarithmes de la formule imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, posant

$$c = \sqrt{(aa + bb)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \cos\varphi = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{c}$$

et de plus

$$lc = C,$$

seront

$$C + \varphi\sqrt{-1},\quad C + (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1},\quad C + (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1},\quad C + (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire sont aussi imaginaires; car, lorsque ou $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm 2\lambda\pi$, qui sont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver que lorsque $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a} = 0$; il seroit donc $b = 0$, et la quantité $a + b\sqrt{-1}$ cesseroit d'être imaginaire. Donc, si l'on prend p pour signifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou négatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ seront renfermés dans cette formule générale

$$C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

où C est le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et l'arc ou l'angle φ est pris tel qu'il est $\sin\varphi = \frac{b}{c}$ et $\cos\varphi = \frac{a}{c}$. Or, puisqu'il y a une infinité d'angles qui conviennent au même sinus $\frac{b}{c}$ et cosinus $\frac{a}{c}$, qui sont tous compris dans la formule $\varphi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, et dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ est en général $= C + \varphi\sqrt{-1}$; puisque cet angle φ renferme déjà tous ces angles. Cependant, si l'on prend pour φ le plus petit angle affirmatif qui répond au sinus $\frac{b}{c}$ et au cosinus $\frac{a}{c}$, la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ sera $= C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle φ est tel, qu'il tient une raison commensurable avec π ou la circonference du cercle, ce sera toujours une marque qu'une certaine puissance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car soit $\varphi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, et puisqu'il est $l(a + b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$, il sera

$$l(a + b\sqrt{-1})^\nu = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que si $\mu + \nu p$ est un nombre pair ou seulement μ pair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^\nu$ sera un nombre réel affirmatif, et même $= c^\nu = (\sqrt{(aa + bb)})^\nu$; or si $\mu + \nu p$ ou seulement μ est un nombre impair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^\nu$ sera un nombre négatif $= -c^\nu$.

Jusqu'ici, on auroit pu croire qu'il seroit indifferent de donner à π quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroissoit rien, ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l{+}a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres négatifs $l{-}a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $= 1$ que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle φ à π, de sorte que si l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fausses, et ne seroient plus d'accord avec celles que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs et négatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, supposons $c = 1$ et $C = 0$, pour avoir cette formule $\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi$, dont tous les logarithmes seront renfermés dans cette formule générale

$$l(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) = (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, soit affirmatif, soit négatif, ou même zero.

De là, nous tirerons premierement d'abord les formules supérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou négatifs. Car, soit $\varphi = 0$, et à cause de $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$, il sera $l{+}1 = p\pi\sqrt{-1}$ ou bien en détaillant

$$l{+}1 = 0,\quad \pm 2\pi\sqrt{-1},\quad \pm 4\pi\sqrt{-1},\quad \pm 6\pi\sqrt{-1},\quad \pm 8\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

or, mettant $\varphi = \pi = 180^\circ$, à cause de $\cos\varphi = -1$ et $\sin\varphi = 0$, il sera

$$l{-}1 = (1 + p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1},$$

prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc

$$l-1=\pm\pi\sqrt{-1},\quad \pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \pm 5\pi\sqrt{-1},\quad \pm 7\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Dévelopons maintenant aussi les cas les plus simples des nombres imaginaires, et soit

1. $\varphi=90^0=\frac{1}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=+1$, il sera

$$l+\sqrt{-1}=\left(\tfrac{1}{2}+p\right)\pi\sqrt{-1};$$

donc tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

$$+\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$
$$-\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Ajoutant ici deux valeurs quelconques ensemble pour avoir le logarithme de $l(+\sqrt{-1})^2$, c'est à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, etc., qui sont tous des logarithmes de -1.

2. Soit $\varphi=270^0=\frac{3}{2}\pi$, et à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=-1$, il sera

$$l-\sqrt{-1}=\left(-\tfrac{1}{2}+p\right)\pi\sqrt{-1};$$

donc tous les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ seront contenus dans les expressions suivantes

$$+\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.,}$$

où il est clair, comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées ensemble donnent $q\pi\sqrt{-1}$, posant q pour un nombre impair quelconque, ce qui est le logarithme de -1 ou de $(-\sqrt{-1})^2$. De plus, si l'on ajoute un logarithme quelconque de $-\sqrt{-1}$ à un logarithme quelconque de $+\sqrt{-1}$, pour avoir un logarithme du produit $(+\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1})$ qui est $=+1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il est clair, de même, qu'il sera $l(+\sqrt{-1})-l(-\sqrt{-1})=l-1$ ou $l(-\sqrt{-1})-l(+\sqrt{-1})=l-1$, tout comme la nature de ces expressions exige.

3. Soit $\varphi = 60^0 = \frac{1}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; on trouvera

$$l\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{1}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

où il est clair que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensem ble produisent $q\pi\sqrt{-1}$ ou quelcun des logarithmes de -1, puisque

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

4. Soit $\varphi = 120^0 = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et l'on trouvera

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{2}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

et puisque

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1,$$

on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant ensemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\varphi = 240^0 = \frac{4}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{4}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1},$$

de sorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{22}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{28}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{26}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes ensemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1.$$

De même, deux de ces logarithmes quelconques ajoutés ensemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car il est

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Et puisqu'il est réciproquement

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on verra aussi que la somme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\varphi = 300^0 = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, et l'on aura

$$l\,\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{5}{3}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$+\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{23}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\tfrac{29}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\ -\tfrac{25}{3}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

où il est évident que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble donnent un logarithme de -1, conformément à ce qu'il est

$$\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1.$$

Et en général, on verra toujours que toutes les opérations qu'on fera avec ces logarithmes, sont parfaitement d'accord avec les opérations relatives faites avec les nombres qui leur conviennent, de sorte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvenient à l'égard des opérations en logarithmes et de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\varphi = 45^0 = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\,\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi, tous les logarithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{25}{4}\pi\sqrt{-4},\ +\frac{33}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{39}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

8. Soit $\varphi = 135^0 = \frac{3}{4}\pi$ ou $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\,\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Et partant, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{35}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{37}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précedens de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1, tout comme il faut, puisque

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=-1.$$

9. Soit $\varphi=225^0=\frac{5}{4}\pi$ ou $\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, et l'on aura

$$l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\left(\frac{5}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\frac{5}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{13}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{21}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{29}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{11}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{19}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{27}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

qui sont les négatifs des précedens; ce qui est aussi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il est

$$\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=1:\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

et partant

$$l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=-l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

10. Soit $\varphi=315^0=\frac{7}{4}\pi$ ou $\cos\varphi=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où l'on aura

$$l\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\left(\frac{7}{4}+p\right)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent, tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ seront

$$+\frac{7}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{15}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{23}{4}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{31}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

$$-\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{9}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{17}{4}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{25}{4}\pi\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété, que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1, ce qui est conforme à la vérité, puisque les quarré-quarrés de ces quatre formules

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produisent le nombre -1.

Ces exemples suffisent pour faire voir que l'idée des logarithmes que je viens d'établir, est la véritable, et qu'elle est parfaitement d'accord avec toutes les opérations que la théorie des logarithmes renferme, de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté, et que toutes les contradictions auxquelles cette doctrine paroissoit assujettie, disparoissent entierement. Par conséquent, la grande controverse qui partagea autrefois Mrs. LEIBNIZ et BERNOULLI, est à present parfaitement décidée, ensorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement.

La belle découverte de M. BERNOULLI, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, se trouve aussi non seulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en est une suite nécessaire, et est portée même par là à une infiniment plus grande étendue, puisque nous voyons que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils sont imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainsi, les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$, il sera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à cause de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conséquemment à cela, si l'on pose le rapport du diametre à la circonference $= 1:\pi$, toutes les valeurs de cette expression $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ seront les suivantes:

$$0, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 4\pi, \quad \pm 6\pi, \quad \pm 8\pi, \quad \pm 10\pi, \quad \text{etc.}$$

De même, les logarithmes de -1 étant divisés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles suivantes qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de $\frac{l-1}{\sqrt{-1}}$ sont

$$\pm\pi, \quad \pm 3\pi, \quad \pm 5\pi, \quad \pm 7\pi, \quad \pm 9\pi, \quad \text{etc.}$$

De la même maniere, on verra que les valeurs des expressions suivantes seront:

Les valeurs de	seront celles-cy à l'infini
$\frac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{5}{2}\pi,\ +\frac{9}{2}\pi,\ +\frac{13}{2}\pi,\ +\frac{17}{2}\pi,$ etc. $-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{11}{2}\pi,\ -\frac{15}{2}\pi,\ -\frac{19}{2}\pi,$ etc.
$\frac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{3}{2}\pi,\ +\frac{7}{2}\pi,\ +\frac{11}{2}\pi,\ +\frac{15}{2}\pi,\ +\frac{19}{2}\pi,$ etc. $-\frac{1}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi,\ -\frac{9}{2}\pi,\ -\frac{13}{2}\pi,\ -\frac{17}{2}\pi,$ etc.

et on tirera également des autres exemples dévelopés cy-dessus de semblables expressions réelles qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déja fait sentir le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1 que de $+1$, sont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puisqu'il est

$$1=(+1)^2=(-1)^2;$$

de même puisque il est

$$1=(+1)^3=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3,$$

on verra que les triples des logarithmes de $+1$, de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ se trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ et -1, ainsi si l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$ que de -1 dans une suite, on obtiendra la serie complette de tous les logarithmes de $+1$; car

$$\begin{array}{lllll} 2l{+}1 \text{ est } 0, & \pm 4\pi\sqrt{-1}, & \pm 8\pi\sqrt{-1}, & \pm 12\pi\sqrt{-1}, & \text{etc.} \\ 2l{-}1 \text{ est } & \pm 2\pi\sqrt{-1}, & \pm 6\pi\sqrt{-1}, & \pm 10\pi\sqrt{-1}, & \text{etc.} \end{array}$$

De la même maniere, les trois racines cubiques de $+1$ étant

$$+1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\quad \text{et}\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

si l'on range les triples de tous les logarithmes de ces trois racines dans une suite, il en résultera la suite complette des logarithmes de $+1$, car

$$3l{+}1 \quad \text{donne} \quad 0, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 12\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 18\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

$$3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \begin{cases} +2\pi\sqrt{-1}, & +\ 8\pi\sqrt{-1}, \quad +14\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \\ -4\pi\sqrt{-1}, & -10\pi\sqrt{-1}, \quad -16\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

$$3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \begin{cases} +4\pi\sqrt{-1}, & +10\pi\sqrt{-1}, \quad +16\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \\ -2\pi\sqrt{-1}, & -\ 8\pi\sqrt{-1}, \quad -14\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Dans ces trois series, chaque logarithme de $+1$ se trouve, et aucun ne s'y rencontre qu'une seule fois; ce qui est une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, et qu'il faut les trois ensemble pour épuiser la nature de l'unité.

Il en est de même de toutes les autres racines de l'unité, et comme les racines quarré-quarrées de $+1$ sont

$$+1, \quad -1, \quad +\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1},$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatrieme partie des logarithmes de $+1$. Or, tous ces quadruples de toutes les quatre racines ensemble produisent toute la suite des logarithmes de $+1$. Il est aussi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque sont differens des logarithmes de toute autre racine du même nombre. Cependant, quoique ces deux logarithmes $l{+}1$ et $l{-}1$ soient differens entr'eux, il est néanmoins $2l{+}1 = l{+}1$ et $2l{-}1 = l{+}1$, sans qu'il soit $2l{+}1 = 2l{-}1$. De la même maniere, ces trois logarithmes

$$l{+}1, \quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

sont differens entr'eux; cependant, nonobstant cette inégalité, il est

$$3l{+}1 = l{+}1, \quad 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l{+}1, \quad \text{et} \quad 3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l{+}1.$$

Nous voyons donc qu'il est essentiel à la nature des logarithmes que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, et que tous ces logarithmes soient differens non seulement entr'eux, mais aussi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en est de même des logarithmes que des angles ou des arcs de cercle; car, comme à chaque sinus et cosinus répond une infinité d'arcs differens, ainsi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande difference qui est, que tous les arcs qui répondent au même sinus et cosinus, sont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre sont imaginaires à la reserve d'un seul, lorsque le nombre donné est positif; car tous les logarithmes des nombres, tant négatifs qu'imaginaires, sont sans aucune exception imaginaires. Or, comme à un arc donné ne convient qu'un seul sinus et cosinus, ainsi à un logarithme proposé ne répond qu'un seul nombre; de sorte que c'est un probleme qui n'admet qu'une seule solution, lorsqu'on demande le nombre qui convient à un logarithme proposé.

PROBLEME 4

Un logarithme quelconque étant proposé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION

Posons premierement que le logarithme proposé soit une quantité réelle $=f$, et on sait que posant le nombre $=e$, dont le logarithme réel $=1$, le nombre qui répond au logarithme f sera $=e^f$.

En second lieu, soit le logarithme proposé $=g\sqrt{-1}$ ou simplement imaginaire, et soit x le nombre qui lui répond. Puisque g est un nombre réel, qu'on le compare avec π, et qu'il soit $g=m\pi$, et il est clair, si m est un nombre entier ou pair ou impair, que le nombre x sera ou $+1$ ou -1. Mais, pour tout autre cas quelconque, le nombre x sera imaginaire et, pour le trouver, on n'a qu'à prendre un arc de cercle $=g$, le rayon étant $=1$ et ayant cherché son sinus et cosinus, le nombre cherché sera

$$x=\cos g+\sqrt{-1}\cdot\sin g.$$

En troisieme lieu, soit le logarithme proposé une quantité imaginaire quelconque $=f+g\sqrt{-1}$, puisqu'on sait que toute quantité imaginaire se peut réduire à cette forme $f+g\sqrt{-1}$, en sorte que f et g soient des nombres réels. Cela posé, il est clair que le nombre cherché x sera le produit de deux nombres dont l'un aura pour logarithme f et l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conséquent, le nombre qui répond au logarithme $f+g\sqrt{-1}$ sera

$$= e^f(\cos g + \sqrt{-1}\cdot \sin g).$$

C. Q. F. T.

On voit donc que le nombre qui répond au logarithme proposé $f+g\sqrt{-1}$, sera réel, lorsque $\sin g = 0$, c'est à dire lorsque $g = m\pi$, le coëfficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou négatif. Dans ce cas, on voit de plus que si m est un nombre pair, à cause de $\cos g = +1$, le nombre cherché sera affirmatif, mais si m est un nombre impair, qu'à cause de $\cos g = -1$, le nombre cherché sera négatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas où m, c'est à dire $\frac{g}{\pi}$, sera un nombre rompu ou même irrationel, le nombre qui répond à ce logarithme $f+g\sqrt{-1}$ sera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette régle, on pourra aussi se servir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expression

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4\left(\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-1} = A.$$

Pour cet effet, on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, et en faire les opérations conformément aux régles généralement reçues, en sorte:

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad \text{donc} \quad 4l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1},$$

$$l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}, \quad \ldots \quad 3l\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{-1},$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}, \quad \ldots \quad 2l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{-1},$$

et enfin

$$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, la somme ou $lA = \frac{79}{12}\pi\sqrt{-1}$.

Par conséquent, le produit cherché sera

$$A = \cos \frac{79}{12}\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{79}{12}\pi$$

ou bien

$$A = \cos \frac{7}{12}\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{7}{12}\pi.$$

Je remarque encore que le logarithme proposé étant $= f + g\sqrt{-1}$, le nombre répondant selon la régle commune, se trouve $= e^{f+g\sqrt{-1}}$. Or, cette expression est tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver. Car on sait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g$ et partant

$$e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f \cdot e^{g\sqrt{-1}} = e^f(\cos g + \sqrt{-1} \cdot \sin g),$$

mais cette derniere expression est plus commode que la premiere, où les imaginaires entrent dans l'exposant.