LEÇON DIX-HUITIÈME.

DIGRESSION SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES, SUR LE PASSAGE DE CES DIFFÉRENCES AUX DIFFÉRENTIELLES ET SUR L'INVENTION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Les premiers auteurs du Calcul différentiel, Barrow et Leibnitz, ont considéré les quantités variables comme croissant par des différences infiniment petites, et ont inventé les équations différentielles pour déterminer les rapports de ces différences. Comme la supposition des quantités infiniment petites répugne à la rigueur de l'Analyse, on a considéré depuis les accroissements des quantités variables comme finis, et l'on a formé, à l'imitation du Calcul différentiel, un nouveau Calcul pour les différences finies, dans lequel les résultats sont rigoureusement exacts. Ce Calcul, dont Taylor avait donné la première idée dans son *Methodus incrementorum*, et dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps sous le nom de *Calcul aux différences finies*, sert à trouver la loi des termes consécutifs d'une série ou progression dans laquelle on connaît l'expression ou la formation du terme général, et réciproquement à trouver l'expression du terme général, d'après la loi des termes consécutifs.

Mais nous observerons que, dans ces recherches, la considération des différences n'est point nécessaire comme dans le Calcul différentiel, et que leur emploi peut même être plus incommode qu'utile, parce que la suppression des termes infiniment petits, qui produit la simplification du Calcul différentiel, n'ayant point lieu dans les différences finies, il arrive souvent que les formules en différences sont plus compliquées que si elles contenaient immédiatement les termes successifs eux-mêmes.

D'ailleurs l'analogie qu'on a cru pouvoir établir entre le Calcul aux différences infiniment petites et le Calcul aux différences finies est plus apparente que réelle, malgré la conformité de quelques procédés et de quelques résultats; car, dans celui-ci, on considère les différents termes de la progression comme représentés par une même fonction de quantités différentes d'un terme à l'autre, et les équations aux différences finies ne sont que des équations entre ces mêmes fonctions; au lieu que les équations différentielles, ou aux différences infiniment petites, sont essentiellement entre des fonctions différentes de la même variable, mais dérivées les unes des autres par des règles fixes et uniformes.

Les équations aux différences finies ne sont autre chose qu'une suite d'équations semblables entre différentes inconnues, par lesquelles on peut toujours déterminer successivement chacune de ces inconnues.

Mais la loi uniforme qui règne entre ces équations fait qu'on peut regarder leurs inconnues comme formant une suite régulière et susceptible d'un terme général, et l'expression de ce terme donne alors la résolution générale de toutes les équations.

Ainsi le Calcul qu'on a nommé *aux différences finies* n'est proprement que le Calcul des suites, et ne peut être assimilé au Calcul différentiel, qui est essentiellement le Calcul des fonctions dérivées.

Mais on a pensé que la considération des différences finies pouvait conduire à celle des différences infiniment petites, et que le Calcul aux différences finies conserverait toute sa rigueur, en devenant Calcul différentiel, par l'omission des termes infiniment petits. Et de là est née la méthode des limites dans laquelle on regarde le rapport des différences infiniment petites comme la limite du rapport des différences finies, et les équations différentielles comme les limites des équations aux différences finies.

Je ne disconviens pas qu'on ne puisse, de cette manière, démontrer la légitimité des résultats du Calcul différentiel; mais, quoique cette marche paraisse directe et naturelle, le passage du fini à l'infini exige toujours une espèce de saut, plus ou moins forcé, qui rompt la loi de continuité et change la forme des fonctions.

Ayant réduit, comme nous l'avons fait, le Calcul différentiel à ses véritables éléments, les fonctions dérivées, et l'ayant ainsi entièrement séparé du Calcul aux différences finies, nous avons cru devoir dire deux mots de la nature et des usages de celui-ci, qui n'est, à proprement parler, que l'analyse ordinaire appliquée à une suite de quantités qu'on suppose dépendre d'une même loi.

Soit une suite de quantités

$$\overset{0}{y},\ \overset{1}{y},\ \overset{2}{y},\ \overset{3}{y},\ \overset{4}{y},\ \ldots,$$

qui répondent à ces quantités en progression arithmétique

$$0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ 4i,\ \ldots.$$

Désignons, en général, un terme quelconque de la première suite par y, et le terme correspondant de la seconde suite par x; désignons de plus par $\overset{\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime\prime}{y}$, ... les termes qui, dans la première suite, suivent le terme y, et qui répondent aux termes

$$x+i,\ x+2i,\ x+3i,\ \ldots$$

de la seconde.

Enfin, désignons, pour plus de simplicité, par les caractéristiques Δ, Δ^2, ... les différences premières, secondes, ... des termes de la première suite, de manière que l'on ait

$$\Delta y = \overset{\prime}{y} - y, \qquad \Delta^2 y = \overset{\prime\prime}{y} - 2\overset{\prime}{y} + y, \qquad \ldots.$$

A l'égard de la seconde suite, il est clair qu'on aura

$$\Delta x = i \quad \text{et} \quad \Delta^2 x = 0, \qquad \ldots.$$

Cela posé, supposons d'abord que la première suite soit formée de la seconde par cette loi très simple

$$y = ax,$$

a étant un coefficient constant pour toute la suite.

On aura donc aussi, en changeant y en y' et x en $x+i$, l'équation

$$y' = a(x+i);$$

et, comme les deux équations doivent avoir lieu en même temps, on pourra, si l'on veut, en éliminer la constante a.

Retranchant, pour cela, la première de la seconde, on aura

$$y' - y = ai \quad \text{ou} \quad \Delta y = ai,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\Delta y}{i};$$

donc, substituant cette valeur dans la première, elle deviendra

$$y = \frac{x \Delta y}{i}.$$

La première équation

$$y = ax$$

donne le terme général de la suite; l'autre équation

$$y = \frac{x \Delta y}{i}$$

donne la loi entre les termes successifs; car, puisque

$$\Delta y = y' - y,$$

on aura

$$y' = y + \frac{iy}{x} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{x+i}{x} y.$$

Réciproquement, on voit que, cette loi des termes étant donnée, le terme général sera nécessairement

$$y = ax,$$

a étant une constante arbitraire, et il est facile de se convaincre que cette expression de y en x est la plus générale qui puisse répondre à l'équation aux différences

$$\Delta y = \frac{iy}{x}.$$

Si la différence i de la progression arithmétique devenait infiniment petite, la différence correspondante Δy deviendrait infiniment petite aussi, et leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$, que nous avons vu être égal à la constante arbitraire a, serait toujours le même. Dans l'infiniment petit, ce rapport devient égal à la fonction dérivée y', en regardant y comme fonction de x, et l'équation devient alors

$$y = xy',$$

qui est l'équation dérivée dont

$$y = ax$$

est l'équation primitive, a étant la constante arbitraire.

Supposons maintenant cette loi

$$y = ax + a^2,$$

qui n'est guère plus compliquée que la précédente.

On aura donc aussi, en changeant y en $\overset{\prime}{y}$ et x en $x + i$,

$$\overset{\prime}{y} = ax + ai + a^2;$$

retranchant la première de celle-ci et mettant Δy pour $\overset{\prime}{y} - y$, on aura

$$\Delta y = ai,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\Delta y}{i},$$

et, substituant cette valeur à la place de a, on aura

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2},$$

équation aux différences finies, et qui est indépendante de la constante a.

La première équation donne donc l'expression du terme général, et la seconde donne la loi entre les termes successifs, de manière que, cette loi étant proposée, on aura, par la première, le terme général avec une constante arbitraire a.

L'analyse précédente suppose que la quantité a est indépendante de x, puisqu'elle demeure la même dans les deux équations successives; mais, si elle dépendait de x, de manière que les deux équations eussent néanmoins la même forme que dans le cas où elle est constante, il est clair que l'équation aux différences, qui résulte de ces deux équations par l'élimination de a, serait encore la même; par conséquent on aurait plus d'une équation en x et y pour la même équation aux différences : c'est le principe qui donne les équations primitives singulières, comme on l'a vu dans la Leçon quatorzième.

Supposons donc, en général, que la quantité a, qui répond à x, devienne $\acute{a}$, $\acute{\acute{a}}$, ... lorsque x devient $x+i$, $x+2i$, ...; les deux équations successives, dont l'une répond à x et l'autre à $x+i$, seront

$$y = ax + a^2,$$
$$\acute{y} = \acute{a}(x+i) + \acute{a}^2.$$

Or, si l'on suppose que les quantités a et $\acute{a}$ soient telles que l'on ait

$$\acute{a}(x+i) + \acute{a}^2 = a(x+i) + a^2,$$

la seconde équation deviendra

$$\acute{y} = a(x+i) + a^2,$$

comme dans le cas où a est supposée constante; par conséquent, on aura également, par l'élimination de a, l'équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

Il s'agit donc de trouver le terme général de la série dont les termes consécutifs a et $\acute{a}$, répondant à x et $x+i$, ont entre eux la relation déterminée par l'équation ci-dessus, qui se réduit à cette forme

$$\acute{a}^2 - a^2 + (x+i)(\acute{a} - a) = 0,$$

et qui est, comme on voit, du genre des équations aux différences.

Cette équation se réduit à

$$[a' + a + (x+i)](a' - a) = 0$$

et se décompose, par conséquent, en ces deux-ci,

$$a' - a = 0, \qquad a' + a + x + i = 0.$$

La première donne

$$a' = a,$$

et, par conséquent, a égal à une constante quelconque; c'est le cas que nous avons supposé d'abord.

La seconde donne une relation entre a et a', d'après laquelle il faut trouver le terme général.

Pour simplifier cette équation, je suppose d'abord

$$a = u + mx + n,$$

m et n étant des constantes et u une nouvelle variable; j'ai

$$a' = u' + m(x+i) + n,$$

et l'équation devient, par ces substitutions,

$$u' + u + (2m+1)x + 2n + (m+1)i = 0,$$

où je peux faire disparaître les termes indépendants de u.

Je fais donc

$$2m + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2n + (m+1)i = 0,$$

ce qui donne

$$m = -\frac{1}{2}, \qquad n = -\frac{i}{4};$$

de sorte qu'en faisant

$$a = u - \frac{x}{2} - \frac{i}{4},$$

l'équation se réduit à cette forme plus simple

$$u' + u = 0.$$

J'observe maintenant qu'en supposant

$$u = br^x,$$

b et r étant des constantes, on a

$$\overset{\prime}{u} = br^{x+i},$$

et la substitution donne

$$br^{x+i} + br^x = 0,$$

équation divisible par br^x, et qui donne

$$r^i + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$r^i = -1 \qquad \text{et} \qquad r = (-1)^{\frac{1}{i}}.$$

Ainsi l'expression

$$u = b(-1)^{\frac{x}{i}}$$

satisfait à l'équation avec la constante arbitraire b. En effet, en supposant cette équation en u et x, pour faire disparaître la constante b, on prendra l'équation successive

$$\overset{\prime}{u} = b(-1)^{\frac{x+i}{i}} = -b(-1)^{\frac{x}{i}},$$

et, éliminant b, on aura

$$u + u' = 0,$$

équation proposée.

Donc l'expression générale de a sera

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4},$$

et cette valeur, substituée dans l'expression de y, donnera un nouveau terme général avec une constante arbitraire b, qui satisfera également à la même équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

Pour faciliter cette substitution, je mets l'expression donnée de y sous cette forme

$$y = \left(a + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

et j'y substitue, pour a, la valeur qu'on vient de trouver; il vient cette nouvelle expression de y

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Comme b est ici une constante arbitraire, on peut aussi la faire disparaître par l'équation successive, dans laquelle x devient $x + i$, et y devient y' ou $y + \Delta y$; on aura ainsi

$$y + \Delta y = \left[-b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{(x+i)^2}{4},$$

à cause de

$$(-1)^{\frac{x+i}{i}} = (-1)^{\frac{x}{i}+1} = -(-1)^{\frac{x}{i}}.$$

Retranchant de cette équation la précédente et observant que la différence des deux carrés est le produit de la somme par la différence des racines, on aura tout de suite

$$\Delta y = ib(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{ix}{2} - \frac{i^2}{4},$$

d'où l'on tire

$$b(-1)^{\frac{x}{i}} = \frac{\Delta y}{i} + \frac{x}{2} + \frac{i}{4};$$

et cette valeur, substituée dans la première équation, donne l'équation aux différences

$$y = \left(\frac{\Delta y}{i} + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

savoir,

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2},$$

qui est la même valeur qu'on avait trouvée dans le cas où a était la constante arbitraire.

Si maintenant on suppose que la différence i devienne infiniment petite, la différence correspondante Δy le deviendra aussi; mais leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$, qui, dans le premier cas, est égal à a et, dans le second, est égal à $b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$, demeurera fini; ce rapport devient alors la fonction dérivée de y, regardée comme fonction de x, et l'équation aux différences devient, par conséquent,

$$y = xy' + y'^2,$$

qui est, en effet, l'équation dérivée dont la primitive est

$$y = ax + a^2,$$

a étant la constante arbitraire.

Car, en prenant les fonctions dérivées, on a

$$y' = a,$$

et, substituant cette valeur, il vient

$$y = xy' + y'^2.$$

Mais que devient alors la seconde expression de y qui contient la constante arbitraire b?

Suivant les principes des infiniment petits, le terme $-\frac{i}{4}$ doit être rejeté vis-à-vis du terme fini $b(-1)^{\frac{x}{i}}$; ainsi on aurait simplement

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}}\right]^2 - \frac{x^2}{4} = b^2 - \frac{x^2}{4},$$

à cause de

$$(-1)^{\frac{2x}{i}} = 1^{\frac{x}{i}} = 1.$$

Mais cette valeur de y ne satisfait pas à l'équation dérivée, à moins qu'on ne suppose

$$b = 0,$$

car elle donne

$$y' = -\frac{x}{2}.$$

Faisant la substitution, on a

$$b^2 - \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

et, par conséquent,

$$b = 0.$$

Ainsi il faut dire que le passage du fini à l'infiniment petit anéantit non seulement les quantités infiniment petites, mais encore la constante arbitraire.

Au reste, en faisant

$$b = 0,$$

l'expression

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

devient une valeur singulière; car, en prenant les fonctions dérivées relatives à a dans l'équation primitive

$$y = ax + a^2,$$

on a

$$x + 2a = 0,$$

d'où

$$a = -\frac{x}{2},$$

et de là

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

Ainsi on peut regarder aussi la seconde expression de y comme une valeur singulière du terme général; mais, comme elle conserve la constante b tant que les différences i sont finies, il est clair qu'elle a la même généralité que la première, en sorte qu'on peut supposer que la valeur de y soit donnée lorsque $x = 0$, ce qui n'a pas lieu pour les valeurs singulières des équations primitives ordinaires.

Feu Charles, de l'Académie des Sciences, est le premier qui ait fait cette remarque importante, qu'à une même équation aux différences finies peuvent répondre deux équations intégrales ou sans différences, ayant chacune une constante arbitraire. (*Voyez* les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1783.)

Mais les conséquences qu'il a voulu en tirer dans la suite (Mémoire de 1788), relativement aux intégrales des équations différentielles, sont tout à fait illusoires; elles prouvent seulement qu'on ne peut pas appliquer immédiatement à l'infiniment petit proprement dit les résultats trouvés dans la supposition du fini, et que, dans le passage du fini à l'infiniment petit, il faut supprimer entièrement tous les termes qui peuvent contenir l'infiniment petit, quoique ces termes puissent n'être pas eux-mêmes infiniment petits.

Ainsi, dans la formule

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

le terme $b(-1)^{\frac{x}{i}}$ ne devient pas infiniment petit par la supposition de i infiniment petit; néanmoins, ce terme contenant la différence i, qui devient infiniment petite dans l'équation différentielle, doit être supprimé pour avoir un résultat exact. En effet, en effaçant tout ce qui contient i dans l'équation précédente, on a simplement

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

comme cela doit être pour satisfaire à l'équation dérivée.

La raison en est que, dans le passage supposé du fini à l'infiniment petit, les fonctions changent réellement de nature, et que le $\frac{dy}{dx}$, qu'on emploie dans le Calcul différentiel, est essentiellement une fonction différente de la fonction y, tandis que tant que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité n'est que la différence de deux fonctions de la même forme; d'où l'on voit que, si le passage du fini à l'infiniment petit peut être admis comme moyen mécanique de calcul, il ne peut servir à faire connaître la nature des équations différentielles, qui consiste en ce qu'elles donnent des rapports entre les fonctions primitives et leurs dérivées.

On peut trouver d'une autre manière les mêmes expressions de y qui satisfont à l'équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

En prenant l'équation successive qui répond à $x+i$, on a aussi

$$y' = \frac{(x+i)\,\Delta y'}{i} + \frac{\Delta y'^2}{i^2};$$

mais

$$y' = y + \Delta y, \qquad \Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y;$$

donc, retranchant la première équation de la seconde, on aura

$$\Delta y = x\frac{\Delta^2 y}{i} + \Delta y + \Delta^2 y + \frac{2\,\Delta y\,\Delta^2 y}{i^2} + \frac{\Delta^2 y^2}{i^2},$$

savoir, en multipliant par i et réduisant,

$$\left(x + i + \frac{2\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta^2 y}{i}\right)\Delta^2 y = 0,$$

équation qui se décompose, comme l'on voit, en deux,

$$\Delta^2 y = 0 \qquad \text{et} \qquad x + i + \frac{2\,\Delta y + \Delta^2 y}{i} = 0.$$

La première donne tout de suite

$$\Delta y = \text{à une constante};$$

faisant cette constante $= ai$, on obtiendra

$$\Delta y = ai;$$

substituant cette valeur dans l'équation aux différences, on aura, comme plus haut,

$$y = ax + a^2.$$

Retenons maintenant la supposition

$$\Delta y = ai,$$

mais en regardant a comme une variable dépendante de x; on aura

$$\Delta y = a'i \qquad \text{et} \qquad \Delta^2 y = (a' - a)i;$$

donc l'autre équation deviendra

$$x + i + a + a' = 0,$$

qui est la même que nous avons trouvée plus haut, et d'où nous avons tiré

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}.$$

On aura donc

$$\Delta y = i\left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}\right],$$

et, comme l'équation aux différences peut se mettre sous la forme

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta y}{i}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

la substitution de cette valeur de Δy donnera

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

comme plus haut.

Cette manière de trouver la seconde expression de y revient à la méthode que nous avons exposée dans la Leçon XVI, pour les équations primitives singulières.

En supposant i infiniment petit, les valeurs de a et a', qui répondent à x et $x + i$, ne doivent différer l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite; par conséquent, par le principe des infiniment petits, l'équation

$$a' + a + x + i = 0$$

se réduit à

$$2a + x = 0,$$

ce qui donne

$$a = -\frac{x}{2},$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{x^2}{2},$$

comme dans le cas de

$$b = 0.$$

En effet, l'expression de a

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

donne, relativement à $x+i$,

$$\acute{a} = -b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x+i}{2} - \frac{i}{4},$$

où l'on voit que, dans le cas de i infiniment petit, la différence entre a et $\acute{a}$ demeure finie tant que la constante b n'est pas nulle.

En général, soit

$$F(x, y, a) = 0$$

l'équation par laquelle le terme général y est déterminé en fonction de x, a étant une constante quelconque.

Cette équation est censée avoir lieu également pour les termes successifs y', y'', ..., qui répondent aux valeurs successives $x+i$, $x+2i$, ... de x; ainsi on aura

$$F(x+i, y', a) = 0,$$

et l'on pourra, par la combinaison de ces deux équations, éliminer la constante a.

On aura, de cette manière, une équation sans a, mais qui sera en x, y et y'; et, si à la place de y' on substitue $y + \Delta y$, l'équation sera en x, y et Δy; ce sera alors proprement une équation aux différences premières.

De même, si l'équation du terme général renferme deux constantes a et b, comme

$$F(x; y, a, b) = 0,$$

on pourra faire évanouir ces deux constantes par le moyen des deux équations successives

$$F(x+i, y', a, b) = 0, \qquad F(x+2i, y'', a, b) = 0.$$