Riemann Anti-Tontos Parte 29

Los crímenes de Klein

Al trabajar los conceptos que subyacen la prueba de 1799 de Gauss del teorema fubdmental del álgebra, o el descubrimiento de Gauss de los principios que surgen de la división del círculo (para tomar solamente dos ejemplos), uno se enfrenta inmediatamente con el hecho de que tales descubrimientos surgen de métodos de pensamiento explícitamente antideductivos. La mayor parte de las dificultades que experimentan los estudiantes modernos que intentan trabajar esos descubrimientos, están arraigadas en la tendencia de estos individuos a regresar a los habitos profundamente impregnados de pensamiento deductivo, justo en el punto donde se requiere un salto creativo explícitamente anti-deductivo. “¿Dónde esta el cubo en la construcción de Arquitas?”; “¿Qué está tratando de probar Gauss exactamente?”; “Entiendo lo que dices, pero no entiendo que significa” son algunos de los síntomas comunes de tal aflicción.

La persona seria podrá valorar que tales síntomas no indican necesariamente una condición incurable, sino sólo los efectos recurrentes de los métodos de enseñanza maliciosos que sufren la mayoría de las personas en la actualidad. Para los pacientes de tales efectos será útil tener una visión clínica de cómo se introdujo ese “deductivismo” en las prácticas educacionales modernas por Félix Klein, el nieto político de G.W.F. Hegel. Siendo un matemático talentoso, Klein fue un reduccionista, no tan radical o tan abiertamente fascista como Russell, Kronecker o Helmholtz. Aun así, su método fue Bogomilismo puro. En vez de intentar borrar los descubrimientos creativos de Leibniz, Gauss y Riemann, Klein adoptó un aparente “terreno intermedio”, por así decirlo, en el cual los descubrimientos fueron despojados de su profundo conocimiento creativo y amoldados a una forma deductiva, es decir, impotente. Aunque Klein tuvo una vasta influencia sobre los métodos de enseñanza de una amplia gama de temas científicos, para nuestro propósito actual es suficiente ver su tratamiento de los principales descubrimientos de Gauss para obtener el beneficio clínico de liberar a esos individuos que, sabiéndolo o no, han sido victimizados por el crimen de Klein.

Como discutimos en pedagógicas anteriores de esta serie, los principales descubrimientos de Gauss tienen origen en las paradojas que surgen en las investigaciones de “poderes”, de la manera en que Platón define este concepto, y cómo surgen esas paradojas en los problemas clásicos de doblar el cubo y trisectar un ángulo. Para Platón, Cusa, Kepler, Leibniz, Kaestner, Gauss y Riemann, estas investigaciones nos llevan a las cuestiones mas profundas concernientes a la relación del hombre con el universo. Así, en sus escritos de 1895, *Famosos Problemas de Geometría Elemental*, Klein reduce esos problemas a lo siguiente, lo cual parecerá inquietamente familiar para la mayoría de estudiantes hoy:

“En todos estos problemas los ancestros buscaron en vano una solución con regla y compás, y la celebridad de esos problemas se debe pricipalemente al hecho de que su solución parecía demandar el uso de herramientas de un orden superior...”

Esto es ya un fraude completo. El círculo de Platón no considera la regla y compás como “herramienta”, sino que, como Kepler resume el problema en el primer libro de la “Armonía del Mundo”, el problema a investigar es la “cognoscibilidad” de magnitudes. Esto es, qué magnitudes son “cognoscibles” a partir de la circunferencia y el diámetro del círculo, y cuales son “incognoscibles”.

Klein continúa, “Desde el principio debemos insistir sobre la diferencia entre construcciones teóricas y prácticas. Por ejemplo, si necesitamos un círculo dividido como instrumento de medida, simplemente lo construimos. Teóricamente, en tiempos antiguos, sólo era posible (con el uso de regla y compás) dividir el círculo en un número de partes 2^n, 3 y 5 y sus productos. Gauss añadió otros casos al mostrar la posibilidad de la división en donde *p* es un número primo de la forma $p=(2^{2p})+1$, y la imposibilidad para todos los otros números. De estos resultados no se derivó ninguna ventaja práctica; la importancia de los desarrollos de Gauss es puramente teórica”.

La separación que hace Klein entre lo teórico y lo práctico, además de ser un fraude, es puro Bogomilismo perverso. Uno sólo necesita ver la narración que hace Eratóstenes de la historia de la duplicación del cubo, como lo reportaTheon of Esmirna:

“En su trabajo titulado *Plotinicus*, Eratóstenes relata que cuando el dios proclamó a los Delianos por medio del oráculo que, para liberarse de una plaga, debían construir un altar del doble de tamaño que el existente, sus artesanos en sus esfuerzos por descubrir cómo se podría hacer un sólido del doble de un sólido similar fueron presa de la perplejidad. Fueron a preguntarle a Platón sobre esto, quien les respondió que lo que el oráculo quería decir, no era que el dios quería un altar del doble de tamaño, sino que deseaba, al asignarles tal tarea, avergonzar a los Griegos por su desprecio de las matemáticas y su desdén por la geometría.”

¿Dónde está la separación entre lo teórico y la práctico en la narración de Eratóstenes? ¿Fue sólo un asunto teórico, que los Delianos devinieran tan moralmente corruptos y cayeran víctimas de una plaga mortal por su menosprecio de los poderes cognoscitivos de la mente?

Cuando la Guerra de los Treinta Años empezó a desplegar el máximo de sus horrores, Kepler, en ocasión del 25 aniversario de la publicación de su *Mysterium Cosmographicum*, invocó los beneficios “prácticos” del poder de cognición “que incluso ahora todavía hubiera, después del trastrocamiento de los asuntos austriacos que siguieron, un lugar para el dicho oracular de Platón. Ya que cuando Grecia estaba incendiada por doquier en una larga guerra civil y estaba atormentada por todos los males que usualmente acompañan a una guerra civil, y se le consultó acerca del Enigma Deliano, buscó un pretexto para dar un consejo saludable para los pueblos. Respondió ampliamente que, de acuerdo a la opinión de Apolo, Grecia estaría en paz si los griegos regresaban a la geometría y otros estudios filosóficos, en tanto que estos estudios tornarían sus espíritus de la ambición y otras formas de codicia, de las cuales surgen las guerras y otros males, al amor, la paz y a la moderación en todas las cosas”.

El mismo Gauss, como director del observatorio de la Universidad de Gotinga, dijo que los problemas políticos en que había caído Europa en ese entonces, surgían del desdén por los descubrimientos puramente cognoscitivos.

Klein está mortalmente equivocado. Los descubrimientos de Gauss no son puramente teóricos. Reconocer esto es crucial para ser capaz de entender las matemáticas elementales desde un punto de vista verdaderamente avanzado (Larouchiano).

Riemann Anti-Tontos Parte 30

Los poderes de Uno

La mañana del 30 de marzo de 1796, Carl Friedrich Gauss descubrió que la forma en que la gente había pensado por más de 2,000 años era equivocada. Ese fue el día cuando, después de un intensivo periodo de concentración, vió con mayor penetración que nadie mas antes la "conexión profunda" entre las magnitudes trascendentales y la aritmética superior.

El primer anuncio público de su descubrimiento fue a iniciativa de E.A.W. Zimmerman, un colaborador de Abraham Kaestner, quien dirigía el Collegium Carolineum, la escuela de estudios clásicos, donde Gauss había recibido su educación preparatoria. La noticia se publicó en abril de 1796 en una edición de *Allegemeine Literatuzeitung*:

"Cualquier principiante en geometría sabe que varios polígonos regulares, como el triángulo, el cuadrilátero, el pentágono, el polígono de 15 lados, y los que surgen por la continua duplicación del número de lados de ellos, son geométricamente construibles."

"Fue así desde los tiempos de Euclides, y, desde entonces, parece haberse generalmente dicho que el campo de la geometría elemental no se extiende más allá de eso; al menos no se de un intento exitoso por exceder esos límites."

"Tanto más, pienso, el descubrimiento merece atención, que además de esos polígonos ordinarios hay aún otro grupo, por ejemplo el de 17 lados, que se pueden construir geométricamente. Este descubrimiento es, en verdad, solo un corolario especial para una teoría de mas grande alcance, todavía no completa, que será presentada al público tan pronto como haya sido completada."

Carl Friedrich Gauss
Estudiante de Matemáticas en Goettinger

"Merece mencionarse, que el Sr. Gauss está ahora en sus 18 años de edad, aquí en Brunswick dedicado con igual éxito a la filosofía y la literatura clásica, así como a las matemáticas superiores."

Prof. E.A.W. Zimmerman.

Riemann Anti-tontos Parte 31

El periodo orbital del círculo

La mayoría encontrará muy desafiante lo que sigue, pero cualquiera que haga el esfuerzo de trabajarlo será ricamente recompensado, ya que el conocimiento obtenido tiene profundas implicaciones para la sobre vivencia de la civilización.

Si vemos en los casos conocidos de polígonos construibles, el triángulo, el cuadrado y el pentágono, cada uno es construible por una serie de pasos sucesivos, mediante los cuales se construye una magnitud "cognoscible" y, después de esa magnitud, se construye otra magnitud "cognoscible", hasta que el lado del polígono es encontrado. Por ejemplo, el triangulo se construye construyendo primero el hexágono a partir del radio del círculo; después se construye el lado del triangulo a partir del lado del hexágono. El cuadrado se construye de un diámetro y un segundo diámetro perpendicular al primero. El pentágono se construye construyendo primero la proporción áurea, y después se deriva el lado del pentágono de la proporción áurea.

En cada uno de los ejemplos anteriores, cada magnitud en la cadena se construye de su predecesora por simple acción circular. Consecuentemente, tales magnitudes son conmensurables con el tipo de magnitudes asociadas con doblar el cuadrado, es decir, magnitudes de segundo grado, que se generan por simple acción circular. Distintas son las magnitudes de tercer grado que se asocian con doblar el cubo, las cuales, como se vio en la construcción de Arquitas, requieren la acción compleja de rotación y extensión.

Por lo tanto, aquellos polígonos, cuya construcción se puede rededucir a una cadena anidada de magnitudes de segundo grado son, en principio, construibles. Todas las otras no lo son. El descubrimiento crucial de Gauss fue reconocer que cada polígono ("sistema planetario") se podía construir como una cadena de "periodos orbitales" y "sub-periodos". El carácter de las magnitudes asociadas con esos periodos y sub periodos, está determinado por las características numérico-teóricas del número primo, o más específicamente, del número primo menos 1.

Aquí dentro yace la "conexión profunda" entre la generación de magnitudes trascendentales y la Aritmética superior. Las características aritméticas determinan la geometría, mientras que la geometría, a su vez determina las características aritméticas. A diferencia de formalistas tales como Euler, Lagrange y D'Alembert, Gauss no vio distinción entre las características geométricas y las aritméticas. El mismo principio físico que gobierna al círculo, gobierna al número. Lo que el círculo oculta, el número lo revela. Uno solamente necesita ser capaz de, como dijo Platón, "ver la naturaleza del número con solo la mente". (Recuerda que la palabra griega de la cual se deriva "aritmética" tiene la misma raíz que la palabra griega, "armonía").

Para Gauss, el círculo no es simplemente un objeto en el espacio visible, sino mas bien un artefacto de acción en el dominio complejo. Divisiones sucesivas del círculo reflejan una sucesión de diferentes tipos de acciones correspondientes a la jerarquía de poderes. Los vértices de un polígono regular de "n" lados, son las "n" raíces de 1. Inversamente, esos vértices pueden ser generados como una sucesión de poderes.

Irónicamente, los principios del así llamado dominio "imaginario" determina lo que es posible en el dominio visible. Gauss mostró que el principio profundo de su generación deviene conocido con el examen de lo que él llamó los “residuos de poderes” en sus *Disquisitiones Arithmeticae*.

Cada módulo número primo tiene un periodo característico de residuos respecto a una serie de poderes. Por ejemplo, el módulo 5 produce el periodo de residuos *1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3*,etc., con respecto a los poderes de 2, y el periodo de residuos *1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2*, etc., con respecto a los poderes de 3 (Ver Riemann Anti-Tontos Partes 20-23.)

(Dado que los poderes de 2 y 3 produce periodos completos, todos diferentes, se les llama “raíces primitivas” de 5. Compara este resultado con los periodos generados de los residuos de los poderes de 2 y 3 relativo al módulo 7. En el caso de 7, 3 es una raíz primitiva, mientras que 2 no lo es).

Estos periodos son periodos completos y no se alteran cuando todos los elementos son multiplicados por cualquier número. Por ejemplo, multiplica *1, 2, 4, 3* por cualquier número, y toma los residuos relativos al módulo 5. El periodo resultante será el mismo que el primero. De manera similar, para el periodo *1, 3, 4, 2*. (El lector deberá ejecutar esos experimentos.)

Cada periodo completo tiene también dos sub periodos. Para el caso del módulo 5, esos sub periodos son *1, 4* y *2, 3*, los cuales “orbitan” uno en otro. Cuando cada sub periodo es multiplicado por 2 o 3, se transforman en el otro. Cuando se multiplican por 1 o 4, permanecen incambiables.

De manera similar, el módulo 7 produce el periodo de residuos, *1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5* con respecto a los poderes de 3. Este contiene 2 sub-periodos de 3 elementos cada uno, *1, 2, 4* y *3, 6, 5* y 3 sub-periodos de 2 elementos cada uno, *1,6*; *3, 4*, y *2, 5*. (Mucho se ganará si el lector trata de multiplicar los elementos de cada sub- periodo para ver que trasformaciones ocurren).

El módulo 17 produce el periodo de residuos, 1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6 con respecto a los poderes de 3. Este contiene 2 sub-periodos de 8 elementos: 1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2 y 3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6; 4 sub-sub-periodos de 4 elementos: 1, 13, 16, 4; 9, 15, 8, 2; 3, 5, 14, 12; y 10, 11, 7, 6. Y, finalmente, 8 sub-sub-sub-periodos de 2 elementos: 1, 16; 3, 14; 9, 8; 10, 7; 13, 4; 5, 12; 15, 2; 11, 6.

Nota que, en todos los casos, la suma de los números de un periodo o sub periodo es siempre congruente a 0 relativo a los módulos, y que las longitudes de todos los periodos son siempre el módulo menos 1, o un factor del módulo menos 1.

La Determinación de las Orbitas del Polígono

Siendo un artefacto de una acción en el dominio complejo, cada uno de los vértices individuales corresponden a un número complejo. Los “n” números complejos corresponden a los “n” vértices de un polígono de “n” lados, comprendiendo un periodo completo de “n” raíces. El problema que Gauss enfrento fue ¿cómo determinar las posiciones de los vértices individuales (“orbitas”) de un polígono?.

El descubrimiento de Gauss fue mostrar que cada una de esas “orbitas” está completamente determinada por la naturaleza armónica del todo. Que el principio armónico se refleja en la cadena anidada de periodos y sub periodos de los residuos de poderes. Gauss trabajó por inversión. Como Kepler con las orbitas planetarias, Gauss entendió que el principio armónico determina las posiciones individuales, de esa manera desarrolló un método para trabajar de arriba a abajo, esto es, desde la armonía a las notas, por así decirlo, mostrando como “leer” esta cadena de periodos y sub periodos para determinar las posiciones de los vértices, (“orbitas”) del polígono.

Para propósitos pedagógicos es mas eficiente ilustrarlo si continuamos con el ejemplo del pentágono.

El primer paso en la determinación de los vértices del pentágono es organizar los vértices en un periodo “armónico”. Como ya mostramos anteriormente, todos los vértices se pueden generar como una serie de poderes de cualquiera de ellos. Por lo tanto, Gauss empieza con uno de los vértices y genera todos los otros como una serie de poderes. Pero, para descubrir las características “armónicas”, tienen que ser ordenadas de acuerdo al principio exhibido por los residuos de la raíz primitiva. Continuando con el ejemplo del pentágono, esto significaría generar el periodo de los poderes de a^ (2^0), a^(2^1), a^(2^2) y a^(2^3). Tomando los residuos de esos periodos relativos al módulo 5, esos vértices estarán ahora en el orden, *1*,*2*, *4*,*3*.

Este periodo puede ser dividido en dos sub periodos *1*,*4* y *2*,*3*, que define el primer conjunto de magnitudes requeridas para construir el pentágono. Para determinar el valor de estas magnitudes, Gauss las considero como “raíces”, y, dado que son dos, deben ser “raíces” de una ecuación cuadrática. Llama al valor de *1*,*4*= r1 y al valor de *2*,*3*= r2.

Aquí, de nuevo, Gauss trabajó por inversión. Aun sin conocer cuales son los valores para r1 y r2, excepto que son “raíces” de la misma ecuación cuadrática, Gauss pudo trabajar hacia atrás desde la relación armónica entre ellas para determinar lo que debe producirlas.

Para resolver este problema, Gauss recurre a la relación entre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones algebraicas (introducidas sin demostración). Esa relación es tal que si una ecuación cuadrática está en la forma x^2+Ax+B=0, la suma de las raíces es igual a -A y el producto de las raíces es igual a B.

Regresando a nuestro ejemplo. Aun sin conocer los valores de los vértices individuales, podemos conocer la suma y los productos de ellos. La suma de los sub periodos *1*,*4* y *2*,*3* es *1+2+4+3*. Esto significa sumar juntos los números complejos que corresponden a los vértices 1,2,4,3. Cada número complejo denota una cantidad compleja de rotación y extensión combinadas. Para sumar números complejos, llevas a cabo la rotación y extensión en serie. En este ejemplo, primero lleva a cabo la rotación y extensión que produce el vértice 1. Entonces desde el punto final del vértice 1, ejecuta la rotación y extensión que corresponde al vértice 2, etc. Geométricamente, ESTO NOS LLEVA “DE DENTRO AFURA” DEL PENTÁGONO, “ADENTRO” . (Ver figura.) De esto se puede ver que la suma de 1+2+3+4 = -1.

De manera similar, también podemos determinar el producto de los sub periodos, aun sin conocer los valores de los vértices individuales. El producto de los sub periodos *1*,*4* y *2*,*3* es *(1+2)+(1+3)+(4+2)+(4+3)*. Tomando los residuos relativos al módulo 5 estos son iguales a *3+4+1+2* los cuales también son iguales a -1. (Ver figura.) (Esto es también evidente del hecho de que 1 x 4 x 2 x 3 = 24 el cual es congruente a -1 módulo 5.)

Por tanto, *1*,*4* y *2*,*3* son las “raíces” de la ecuación cuadrática donde A = 1 y B= -1, o, x^2+x-1=0. Esto significa que *1*,*4* = r1 = (-1+√5)/2, y *2*,*3* = r2 = (-1-√5)/2.

El paso final para la construcción del pentágono es encontrar los dos vértices a partir los valores recién descubiertos de cada sub periodo. Por ejemplo, los vértices 1 y 4 son las "raíces" del sub periodo *1,4*, y los vértices 2 y 3, son las "raíces" del sub periodo *2,3*.

En suma, la acción que genera el pentágono es una cadena anidada de acciones de segundo grado, y así, geométricamente "cognoscible".

Lo que Gauss ha demostrado en general, es que cada polígono se genera por una serie anidada de acciones determinadas por los periodos y sub periodos formados por los residuos de poderes. Dado que el número y longitud de esos periodos y sub periodos está determinada por los factores del módulo menos 1, el grado (o poder) de cada acción se determinará por esos factores.

Por ejemplo, la construcción del heptágono será determinada por una acción cúbica y una cuadrática. El de 11 lados será determinado por una acción de 5to poder y una cuadrática; el de 13 lados por una acción cúbica y dos cuadráticas; el de 19 lados por dos acciones cúbicas y una cuadrática.

Por otro lado, los de 17 lados, 257 lados, el de 65,537 lados son todos generados por una cadena de poderes cuadráticos, y son, por tanto, geométricamente "cognoscibles".

Cualquiera que haga el esfuerzo por revivir este descubrimiento de Gauss a sus 18 años de edad, descubrirá un incremento correspondiente en su propio poder cognoscitivo.

Riemann Anti tontos parte 32

Los inicios de la Geometría Diferencial

Cincuenta y dos años después de la disertación doctoral de 1799 de Gauss sobre el teorema fundamental del álgebra, su estudiante, Bernhard Riemann, presentó para juicio de Gauss, una disertación doctoral igualmente revolucionaria que llevó el descubrimiento inicial de Gauss a un nuevo dominio superior. La tesis de Riemann, *Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja*, elaborada sobre los fundamentos del propio trabajo de Gauss, estableció una generalización completa de los principios de la geometría diferencial física que fue puesta en marcha por Kepler en su propuesta aproximadamente 250 años atrás.

Es benéfico, y quizá esencial, como preliminar para una discusión mas detallada del trabajo de Riemann, revivir tres descubrimientos ejemplares de principios físicos que, tomados juntos, trazan el desarrollo histórico de las ideas que condujeron al trabajo de Riemann: Los principios de Kepler del movimiento planetario; el descubrimiento de Leibniz-Bernoulli del principio de la catenaria; y el propio trabajo de Gauss en geodesia. Los tres, aunque aparentemente distintos, están de hecho íntimamente conectados. Todos ellos tratan, en una forma u otra, con investigaciones de la naturaleza de la gravitación universal, y, tomados en conjunto, contienen una sucesión de conceptos de generalidad y poder crecientes.

Empieza primero con Kepler. Tómalo en su totalidad, desde el *Mysterium Cosmographicum* a *Harmonice Mundi.* El trabajo de Kepler demuetra que la acción que gobierna a cualquier planeta en cualquier momento es una función del principio que organiza al sistema solar como un todo; el principio de gravitación universal. Kepler descubrió que este principio tiene una característica armónica, la cual determina que las órbitas planetarias sean elípticas y no circulares. La forma singular en que cada orbita elíptica individual es determinada, no por cada planeta solo, ni por la interacción en par de ese planeta con el Sol, sino por las relaciones armónicas entre las velocidades máximas y mínimas de todos los planetas. En otras palabras, la acción del planeta en cualquier momento está determinada por esos extremos, entre los cuales "cuelga" la orbita del planeta. Las magnitudes de esos puntos "colgantes", no son arbitrarias, ya que tomadas todas juntas, conforman aproximadamente, el ordenamiento armónico de la escala musical.

La excentricidad de las órbitas planetarias planteó un desafió para Kepler porque no existían los medios matemáticos para determinar la posición, dirección y velocidad exactas de cada planeta en cualquier momento, así él demandó la invención de unas nuevas matemáticas. Kepler prescribió que tales matemáticas deberían ser capaces de determinar como se expresa el principio armónico que determina los extremos del planeta a través de la totalidad de la orbita, y dio los primeros pasos hacia el desarrollo de esas matemáticas. (Ver Riemann anti-tontos partes 1-6).

Respondiendo a la demanda de Kepler, Leibniz y su colaborador, Johann Bernoulli, desarrollaron el cálculo; del cual, la expresión más general se demuestra en su trabajo conjunto sobre la catenaria. A primera vista, la catenaria parece similar, en principio, a una orbita planetaria, en que la forma de la curva parece estar determinada por la posición de los puntos de los cuales cuelga la cadena. Si la posición de estos "puntos colgantes" cambia, la cadena se reorienta a sí misma de tal manera que su forma completa se mantenga. En este sentido, la relación de esos puntos colgantes con todos los otros puntos sobre la catenaria, inicialmente parece análoga a la relación entre las velocidades extremas de un planeta a la orbita entera. Pero, como Bernoulli mostró en su libro sobre cálculo integral, todos los puntos sobre la catenaria, excepto el punto más bajo, son, en todo momento, puntos colgantes. (El lector debe examinar Riemann para anti tontos parte 10 *Justicia para la catenaria* y el capítulo 4 de *Cómo Gauss determinó la Orbita de Ceres,* para hacer los experimentos indicados ahí)[1]. Esto es, en verdad, una inversión del principio expresado en las órbitas Keplerianas. En el caso del planeta, la orbita "cuelga" entre sus dos extremos. Para la catenaria, el extremo, que es el punto más bajo, es el único punto que no cuelga. (En términos de Cusa este es el punto que está simultáneamente en movimiento y en no movimiento.) Aplicando el cálculo de Leibniz, Bernoulli demostró cómo la catenaria se "desdobla" desde su punto más bajo [2].

A su vez, Leibniz demostró que este principio físico también refleja las características presentadas por la función (exponencial) logarítmica. (Ver escrito de Leibniz sobre la catenaria). De esta manera, la cadena colgante se caracteriza por el mismo principio trascendental que subsume la generación de los llamados poderes algebraicos; el cual se exhibe en otros procesos físicos como el crecimiento biológico y también en la escala musical. Consecuentemente, las características de la función (exponencial) logarítmica, es expresión de un principio físico y no de uno matemático.

Ahora, compara los dos ejemplos previos con el descubrimiento de Gauss del Geoide. De 1818 a 1832 Gauss llevó a cabo la medición geodésica del reinado de Hannover. Esto implicaba determinar las distancias físicas a lo largo de la superficie de la Tierra trazando triángulos y midiendo los ángulos formados por las “línea de visión” que eran los lados. La paradoja que enfrentó Gauss fue que la relación entre las longitudes de los lados de los triángulos y los ángulos, es una función de la forma de la Tierra[3]. Sin embargo, la forma de la Tierra no podría ser conocida antes de las mediciones. El problema se complicó más por el hecho de que todas las medidas fueron tomadas con respecto a la dirección de la atracción de la gravedad, como esta aparece determinada por la dirección de una plomada. Al igual que la relación entre los ángulos de un triángulo y las longitudes de sus lados, la dirección de la atracción de la gravedad depende de la forma de la Tierra. Por ejemplo, si la Tierra fuera esférica, la plomada siempre apuntaría hacia el centro de la misma. Si la Tierra fuera elipsoidal, la plomada podría apuntar a diferentes direcciones dependiendo del lugar sobre la elipsoide en que la medición fue tomada. Gauss mostró que el problema era aun más complicado, porque la forma de la Tierra es muy irregular. (Ver Riemann anti-tontos parte 17).

Aquí Gauss enfrentó exactamente el mismo tipo de problema que enfrentaron Kepler y Leibniz antes que él. Las matemáticas existentes no podían medir tal forma irregular. Todos los enfoques previos empezaban con una suposición a priori de la forma de la Tierra, una que se conformaba al conocimiento matemático existente. (Esto nos trae a la mente la insistencia tonta de Galileo de que la catenaria era una parábola porque ésta era la forma en los libros de texto matemáticos que se veía más semejante a la catenaria. Sin embargo, la cadena no lee los textos preferidos de Galileo.) Gauss abandonó todos los intentos de acomodar a la Tierra dentro de una forma asumida, declarando que la forma geométrica de la Tierra es esa que es dondequiera perpendicular a la atracción de la gravedad. En otras palabras, en vez de asumir una forma imaginaria, y medir a la Tierra real como una desviación de la imaginaria, Gauss rechazó la totalidad del mundo de fantasía. (Algo que más y más gente debería hacer hoy día en tanto que el sistema monetario global se desintegra.) La forma físicamente determinada que Gauss midió se ha llegado conocer como Geoide.

En tanto el Geoide es una superficie irregular, su irregularidad está “afinada”, por así decirlo, por el movimiento de la tierra sobre su eje. Como la orbita planetaria, o la cadena colgante, ese movimiento determina las posiciones de dos “puntos colgantes”, específicamente el polo norte y el polo sur, de los cuales cuelga el Geoide.

Sin embargo, dado que el Geoide es una superficie, este tiene una relación diferente a sus polos, que la orbita planetaria a sus extremos, o la catenaria al punto más bajo. Estos dos casos expresan la relación entre singularidades y acción sobre una curva. El primero expresa la relación entre singularidades y acción sobre una superficie, de lo cual se deriva la acción a lo largo de curvas.

El problema que Gauss enfrentó fue que dado que los triángulos físicos que él midió sobre la superficie del Geoide eran irregulares, ¿cómo se podía determinar la longitud de los lados a partir de los ángulos, sin primero conocer la relación entre las longitudes y los ángulos, es decir, la forma de la superficie? Para resolver el problema, Gauss reconoció que dado que todas sus mediciones eran ángulos, se podía liberar de tener que asumir la forma de la Tierra antes de poder determinar sus mediciones, si pudiera proyectar estos ángulos de una superficie a otra, por ejemplo, del geoide a una elipsoide, a una esfera y regresar de nuevo. Al igual que Kepler y Leibniz, Gauss no podía hacer esto con las matemáticas existentes. Inventó una nueva.

Gauss describió los inicios de estas nuevas matemáticas en varios escritos, de manera más notable en su memoria de 1822 sobre el asunto del mapeo conformal, con ella ganó un premio de la Sociedad Real de Ciencias de Copenhague. Riemann se apoyó totalmente en este escrito para los fundamentos de su propia disertación doctoral.

Mapeo conformal es un término, inventado por Gauss, para referir transformaciones de una superficie a otra en la cual se preservan los ángulos entre cualesquier curvas. En su memoria, Gauss describió el mapeo conformal como una transformación donde “las longitudes de todas las líneas indefinidamente cortas tendidas de un punto en la segunda superficie y contenidas en ella será proporcional a la longitud de las líneas correspondientes en la primera superficie, y segundo, que cualquier ángulo entre esas líneas que se intersectan en la primera superficie será igual al ángulo entre las líneas correspondientes en la segunda superficie.

Para tener una idea de lo que esto significa, realiza el siguiente experimento. Toma un hemisferio de plástico transparente y dibuja un triángulo esférico sobre él con líneas negras gruesas. Ve a un cuarto oscuro y, usando una lámpara, proyecta el triángulo en la pared. Si colocas la lámpara en el centro del hemisferio, las líneas curvas del triangulo esférico se transformarán en líneas rectas. Si mueves la lámpara del centro del hemisferio a un polo, las líneas rectas proyectadas devendrán curvas de nuevo y los ángulos entre ellas serán iguales a los ángulos entre los lados del triángulo original sobre el hemisferio. Para descubrir experimentalmente la diferencia entre estas dos proyecciones, coloca círculos de cartón de diferentes tamaños dentro del hemisferio. (Los círculos deberán variar de muy grandes a muy pequeños.) Realiza la misma proyección de antes con la lámpara. Cuando la lámpara está en el centro del hemisferio estos círculos proyectan elipses. Cuando la lámpara está en el polo del hemisferio, los círculos devienen más circulares, con los círculos mas pequeños deviniendo menos circulares que los más grandes. En el primer caso, la transformación de los círculos en elipses indica que la proporción por la cual las figuras se trasforman cambia dependiendo de la dirección de la transformación con respecto a los polos. El segundo caso muestra que las transformaciones son proporcionales en todas direcciones.

Así, el mapeo conformal de una superficie en otra involucra un cambio en la rotación y dirección. Habiendo hecho el trabajo sobre el teorema fundamental del álgebra de Gauss, podrás reconocer, como Gauss lo hizo, que este tipo de cambio sólo puede ser representado en el dominio complejo.

Notas

1. Cualesquiera dos puntos sobre lados opuestos del punto más bajo que sostiene entre ellos el peso de una cadena colgante. La fuerza requerida para sostener este peso es proporcional al seno de los ángulos formados por las tangentes a la catenaria en este

punto, y una línea vertical surgiendo del punto en el cual las tangentes intersecan.
2. El lector está obligado a realizar el experimento descrito en el artículo indicado de NF. Toma una cuerda y ata un peso a la mitad de ella. Toma los extremos de la cuerda en cada mano y deja que el peso cuelgue entre ellos. En tanto separas tus manos, la tensión que sientes en ellas se incrementa. Si empiezas con tus manos muy juntas, la tensión es relativamente pequeña. En tanto vas apartando tus manos, la tensión se incrementa, lentamente primero, pero la tasa de incremento en la tensión crece conforme tus manos se aparten más una de otra. Ahora trata de mover tus manos aparte, con los lados de la cuerda entre tus dedos, de tal manera que la cuerda en un lado permanezca horizontal. La otra mano se moverá en la forma de la catenaria.
3. El lector puede comprender esto comparando triángulos dibujados sobre una hoja de papel, una esfera y una superficie de forma irregular, como una sandia

Riemann Anti-tontos parte 33

Funciones hiperbólicas, una fuga de 25 siglos

Cuando por el año 370 a.C. un oráculo les ordeno a los delianos hacer más grande el altar de su templo- con forma de cubo-, Platón les dijo que mejor se olvidaran de todas las interpretaciones mágicas del oráculo y se concentraran en resolver el problema de doblar el cubo. Este es uno de los primeros relatos de la importancia de los ejercicios pedagógicos o espirituales para la economía.

Algunas crisis, como las que hoy enfrenta la humanidad, requieren un grado de concentración para resolver las paradojas que han perdurado más de lo que dura una vida humana. Por fortuna, la humanidad esta dotada con lo que LaRouche llama “súper genes”, que le dan al individuo la capacidad de un poder de concentración superior, al traer al presente los esfuerzos de generaciones pasadas. Un caso ejemplar es el de la tesis doctoral de Bernhard Riemann de 1854 Sobre las hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría, en la que Riemann habla de una oscuridad que envolvió al pensamiento humano desde Euclides hasta Legendre. Tras más de 2,000 años de concentración en la material, Riemann, apoyándose en su maestro Carl F. Gauss, develo esa oscuridad al desarrollar lo que llamo “un concepto general de magnitud múltiplemente extendida”.

El concepto de Riemann amplio los descubrimientos que ya había hecho Gauss, empezando con su disertación de 1799 sobre el teorema fundamental del álgebra. Como su predecesor, es una devastadora refutación de los métodos de “torre de marfil” de Euler, Lagrange, etc., que hoy dominan la forma de pensar de la mayoría de la población, tal como dominaron la mente de los delianos y otros desafortunados griegos en la época de Platón. Al reconocer que todos los problemas de la sociedad en última instancia eran subjetivos, Platón prescribió (en la Republica) que ese dominio de los ejercicios pedagógicos (en los campos de la música, la geometría, la aritmética y la astronomía) fuera un prerrequisito para ejercer el liderato político. Las crisis como la que ahora enfrentamos (o la que enfrentaron los delianos), solo podían superarse si los lideres desarrollaban la capacidad de liberarse a si mismos, y después a otros, de sus falsas etiquetas.

Estos ejercicios acostumbran a la mente a tornar su atención, de las sombras de la percepción sensorial, al descubrimiento de verdades cognoscibles, aunque invisibles, que el dominio de los sentidos nos refleja como paradojas. El proceso no tiene fin, con cada nuevo descubrimiento surgen nuevas paradojas que dan pie a mas descubrimientos, produciendo una concentración siempre mayor de la condición mental necesaria que produjo el descubrimiento en primer lugar.

Doblando la línea, el cuadrado y el cubo.
Tal es el marco para concentrase en los 2,500 años de investigación sobre las paradojas que el problema de doblar la línea, el cuadrado y el cubo plantearon inicialmente. A la vista, estos objetos parecen similares. El cuadrado se hace con líneas, mientras que el cubo lo componen cuadrados. Pero cuando estos objetos se someten a una acción, tal como el doblarlos, queda claro que aunque estos objetos parecen visualmente similares su principio generador es muy diferente.

Los pitagóricos, que, como se sabe, aprendieron de los egipcios, fueron los primeros griegos en investigar esta paradoja. Al reconocer que todos estos objetos visualmente similares, pero cognosciblemente diferentes, están contenidos en un solo universo, buscaron un principio unificador que subyace en la generación de los tres. Ese principio unificador no podría observarse de forma directa, pero si podía conocerse su existencia a través de su expresión, en la forma de una paradoja, buscando entre las sombras visibles.

Casi 80 años antes de que Platón reprendiera a los delianos. Hipócrates de Cos ofreció una noción basada en el principio pitagórico de la conexión entre la música, la aritmética y la geometría. Los pitagóricos reconocieron las relaciones entre los intervalos musicales, a los que llamaron: la aritmética y la geométrica. La media aritmética es encontrada cuando tres números con una diferencia común: b - a = c - b. Por ejemplo 3 es la media aritmética entre 1 y 5. (ver figura 1ª).

Figura 1ª La media aritmética. b es la media aritmetica entre a y c.

La media geométrica es cuando tres números están en proporción constante: a : b :: b : c. Por ejemplo, 2:4::4:8. (ver figura 1b).

Figura 1b La media geométrica. La longitud b es la media geométrica entre las longitudes a y c. El área B es la media geométrica entre las áreas A y C.

Hipócrates reconoció que la relación aritmética la expresan los intervalos formados al agregar las líneas, y que la geométrica la expresan los intervalos creados al agregar cuadrados o, mas en general áreas. La formación de figuras sólidas, puesto que son de un poder superior, no corresponde directamente a ninguna de estas relaciones musicales. Sin embargo, la sombra proyectada al doblar el cubo, expresaba una relación que correspondía a encontrar dos medias geométricas entre dos extremos.(ver figura 1c).

Figura 1c Dos medias geométricas entre sólidos. Las dos medias geométricas entre un cubo de arista 1 y un volumen 1 y un cubo de arista 2 y volumen 8. Proporcionalmente, habrá dos medias geométricas entre un cubo de volumen 1 y un cubo de volumen 2.

Platón explica en el Timeo la importancia de la noción de Hipócrates:

"Ciertamente, lo generado debe ser corpóreo, visible y tangible… Pero no es posible unir bien dos elementos aislados sin un tercero, ya que es necesario un vinculo en el medio que los una…Si el cuerpo del universo hubiera tenido que ser una superficie sin profundidad, habría bastado con una magnitud media que se uniera a si misma con los extremos; pero en realidad, convenía que fuera sólido y los sólidos nunca son conectados por un termino medio, sino siempre por dos".

En el Epinomis, Platón habla de las investigaciones de las medias geométrica y aritmética: "Algo divino y maravilloso es aquello que se contempla y que refleja como la totalidad de la naturaleza esta impresa con especies y géneros de acuerdo a cada proporción como un poder…Para el hombre que realiza sus estudios de la forma adecuada, todas las construcciones geométricas, todos los sistemas numéricos, todas las progresiones melódicas debidamente construidas, el sistema ordenado de las revoluciones celestes, deberían revelarse a si mismos, y lo harán, si, como digo, un hombre hace sus estudios con la mente fija en un solo propósito. Como tal hombre lo refleja, recibirá la revelación de un simple lazo de interconexión natural entre todos estos problemas. Si maneja tales materias con otro espíritu, un hombre, como digo, necesitara invocar a su suerte.

Debemos dejar sentado que, sin estas capacidades, la felicidad no llegara a ninguna sociedad; este es el método, este es el pábulo, estos los estudios exigidos; difícil o fácil, este es el camino que tenemos que seguir".

Mientras que la reacción inicial al planteamiento de Hipócrates fue que convirtió un rompecabezas imposible en otro, otros lo vieron como un flanco. Si la construcción de dos medias entre dos extremos puede realizarse "entre las sombras", el resultado puede aplicarse al problema de doblar el cubo. Un colaborador de Platón, Arquitas de Tarento, brindo una solución con su famosa construcción, que involucra un cilindro, un toro y un cono (ver figura 4ª). Esto demostró que la construcción requerida solo puede hacerse, no en el dominio plano de las sombras, sino en el dominio superior de las superficies curvas. El resultado de Arquitas es consistente con el descubrimiento de los pitagóricos, de Teetetes y de Platón de la construcción de los cinco sólidos regulares a partir de la esfera.

Figura 4ª Construcción de Arquitas para doblar el cubo. Arquitas desarrolló una construcción para encontrar dos medias geométricas entre dos magnitudes. La longitud mayor es AC, que es el diámetro de un círculo. Ese círculo rota alrededor de A para formar un toro. Entonces se produce un cilindro perpendicular al toro, cuyo diámetro también es AC. La magnitud menor AB es una cuerda de una sección transversal del toro. AB se extiende hasta que interseca al cilindro, formando un triángulo que, al girar, produce un cono. Las tres superficies intersecan en el punto P.

El Descubrimiento de Menecmo

Un alumno de Platón, Menecmo, hizo un descubrimiento adicional al demostrar que las curves generadas a partir de conos tienen el poder de producir dos medias entre dos extremos. Como lo ilustran los diagramas, la parábola tiene la característica de ser una media entre dos extremos, mientras que la hipérbola abarca dos (ver figuras 2ª y 2b). Menecmo demostró que la intersección de una hipérbola y una parábola produce el resultado de situar dos medias entre dos extremos (ver figura 3).

Figura 2ª Las proporciones de una parábola. La parábola la forma el ángulo móvil ABC, tal que el vértice B se mueve sobre la línea OB en tanto C se mueve sobre la línea OC. Esto forma el rectángulo cambiante OBPC. El punto P describe una parábola. Mediante triángulos similares, OA : OB :: OB :OC o OC = OB2
Figura 2b Las proporciones de una hipérbola. La hipérbola la forma la esquina B del rectángulo OABC. En tanto los lados del rectángulo cambian, el área permanece constante. Esto mantiene la proporción 1 : OA :: OA : OA x AB.

Figura 3 Determinación de Menecmo de dos medias usando secciones cónicas. La intersección de una hipérbola y una parábola determina las magnitudes que doblan el cubo. La parábola la forman OA = 1 y el ángulo recto ABD. La hipérbola la forma OC2 del rectángulo OBCD, que tiene un área de 2. En la parábola, OA : OB :: OB : OD, o 1 : OB :: OB : OC2. En la hipérbola, OB x BC = 2. De la combinación de las anteriores se desprende la proporción 1 : OB :: OB : BC :: BC : 2. En otras palabras, la línea OB formará la arista de un cubo de volumen 2 y BC formará la arista de un cubo de volumen 4.

En los descubrimientos de Arquitas y Menecmo había un principio que no florecería del todo sino hasta 2,200 años después, con los descubrimientos de Riemann y Gauss. La solución de Arquitas dependía de una característica de la curva formada por la intersección del cilindro y el toro. Esta curva no podía dibujarse en una superficie plana, porque se curva en dos direcciones (ver figura 4ª y 4b)

Figura 4b Intersección de un cilindro y un toro. La curva que forma la intersección de un cilindro y un toro posee una característica que Gauss llamó curvatura "negativa".

Mas tarde Gauss definiría estas características como curvatura "negativa".

Sin embargo, Menemco hace su construcción –que usa una parábola y una hipérbola – enteramente en el dominio plano de las sombras. Aunque por razones que no serian claras sino hasta la época de Godofredo Leibniz en el siglo 17, la solución de Menecmo funciono porque involucraba el mismo principio de curvatura negativa que la de Arquitas.

Como casi no hay escritos originales, es difícil saber que tan consistentes estaban estos antiguos investigadores griegos del principio que Gauss llamaría curvatura negativa. Lo que si sabemos, es que estos griegos sabían que el principio que determina la acción del universo físico es superior al que domina el mundo plano de las áreas. Así, los principios que gobiernan a los objetos sólidos dependen de curvas, generadas por un tipo de acción superior en el espacio, el cual, cuando se proyecta en el dominio inferior de un plano, tiene la capacidad de situar dos medias entre dos extremos. Estas curvas combinan la aritmética y la geométrica en una sola. Cuando este principio se aplica al dominio superior de los objetos sólidos, produce un resultado experimentalmente validable.

Esto demuestra, como Platón señala, no solo un principio que gobierna al reino físico sino la relación multiconexa entre las dimensiones espiritual y material del universo, de ahí lo apropiado de los ejercicios pedagógicos o espirituales.

El estudio de Kepler de las secciones cónicas

El siguiente avance significativo lo hizo Johannes Kepler, quien estableció la ciencia física moderna como una extensión de estos antiguos descubrimientos griegos, tal como Nicolás de Cusa, Luca Pacioli, y Leonardo da Vinci los redescubrieron. Kepler, citando a Cusa, a quien llamo "divino", dio una particular importancia a la diferencia entre la curva (geométrica) y la recta (aritmética). Kepler escribió en su Mysterium Cosmographicum:

"Pero, después de todo, ¿por que las distinciones entre la curva y la recta, y la nobleza de una curva, en la intención de Dios cuando creo al Universo? ¿Precisamente por que? Salvo que para el Creador mas perfecto fuera absolutamente necesario crear la mas bella obra".

Como parte su investigación astronómica, Kepler domino Las Cónicas de Apolonio, que es una compilación de los descubrimientos griegos sobre estas curves superiores. Como resultado de sus investigaciones sobre la refracción de la luz, Kepler aporto un concepto nuevo y revolucionario de las secciones cónicas. Por primera vez, Kepler considero a las secciones cónicas como una multiplicidad proyectiva:

"Entre estas líneas existe lo siguiente en razón de sus propiedades: pasa de la línea recta, a través de una infinidad de hipérbolas, a una parábola, y de ahí, a través de una infinidad de elipses, al círculo. Así, por un lado la parábola tiene dos cosas en naturaleza infinitas, la hipérbola y la línea recta, la elipse y el círculo. Aunque también es infinito, asume una limitación en el otro lado…Por tanto, los límites opuestos son el círculo y la línea recta: El primero es curvatura pura, la ultima recta pura. La hipérbola, la parábola y la elipse están en medio, y participan de la recta y de la curva, lo mismo la parábola y la hipérbola participan mas de la recta, y la elipse mas de la curva" (ver figura 5)

Figura 5 Concepto proyectivo de Kepler de las secciones cónicas. En tanto el foco se mueve a la izquierda, el círculo se transforma en una elipse. En el límite con el infinito, la elipse se convierte en una parábola. La hipérbola se forma "del otro lado" del infinito".

La discontinuidad que revela esta proyección entre la parábola y la hipérbola es importante para esta discusión. La hipérbola esta al otro lado del infinito, por así decirlo, de la elipse y el circulo, mientras que un lado de la parábola va hacia el infinito y el otro hacia el finito.

De Fermat a Gauss

La importancia de estos limites infinitos comienza a aclararse desde la perspectiva de la reformulación de las Cónicas de Apolunio por parte de Pierre de Fermat, y el desarrollo subsiguiente del calculo por Leibniz and Jean Bernoulli, con un aporte crucial de Christian Huyghens.

Huyghens reconoció que la curva y la recta se expresan en la hipérbola de forma diferente que en las otras secciones cónicas. Su descubrimiento se baso en el mismo principio que reconoció Menecmo, de que la hipérbola, cuando se proyecta sobre un plano, la forma una serie de rectángulos cuyas áreas son siempre iguales. En la medida de que cada uno de los lados de cada rectángulo se hace mas largo, el otro lado se vuelve inversamente mas pequeño. Huyghens centro su atención en el área que encierran la hipérbola y la asíntota, que es la que forma un rectángulo en cambio constante, cuya área siempre es la misma (ver figura 6). Las áreas entre la hipérbola y la asíntota, formada por rectángulos cuyos lados están en proporción son iguales. Del mismo modo, como ilustra el diagrama, aquellas secciones de la hipérbola formadas en tanto la distancia entre la asíntota y el centro aumenta geométricamente, son iguales. Por tanto, mientras las áreas crecen aritméticamente, las longitudes sobre la asíntota lo hacen geométricamente. No pasa por alto la ironía de esta inversión: ¡en la hipérbola, las áreas (geométricas) crecen de forma aritmética, mientras que las longitudes (aritméticas) lo hacen de forma geométrica ¡

Figura 6 Áreas hiperbólicas iguales. Las áreas entre 1 y 2, 2 y 4, y 4 y 8, son todas iguales.

Leibniz descubrió que a esta relación combinada de la aritmética y la geométrica la expresa el principio físico de la catenaria. Leibniz demostró que a la catenaria la forma una curva, que el llamo logarítmica, conocida hoy como "exponencial". Esta curva esta formada de tal modo que el cambio horizontal es aritmética, mientras que el cambio vertical es geométrico. Leibniz demostró que la catenaria es la media aritmética entre dos curves logarítmicas tales (ver figura 7).

Figura 7 Construcción de Leibniz de la catenaria. La catenaria la forma la media aritmética entre dos curvas, a la que Leibniz llamó "logarítmica" y que hoy se conoce como exponencial. En la figura, las líneas están igualmente distribuidas sobre un eje horizontal. La curva "logarítmica" la forman las longitudes verticales que están en proporción geométrica. OO = 1; e' = OO2 y e = 1/OO2; d' = OO3 y d = 1/OO3, etc. La catenaria se forma sumando la longitud e a la e', y dividiendo la longitud combinada entre 2, etc. Los puntos de la catenaria son iguales a (OOn + 1/OOn)/2.

De aquí pasamos directamente al descubrimiento de Gauss y Riemann, a trabes de ostros descubrimientos de Leibniz y Bernoulli relacionados con la catenaria: la relación de la catenaria con la hipérbola. (1) Esta relación se forma a partir del descubrimiento de Huyghens. Las áreas hiperbólicas iguales definen ciertos puntos sobre la hipérbola que se "proyectan" sobre su eje, mediante líneas perpendiculares que van desde el eje hasta esos puntos. Estas proyecciones producen longitudes sobre el eje, como demostró Leibniz, ¡del mismo largo que las que produce la catenaria¡ (ver figuras 8ª, 8b y 8c)

Figura 8ª Proyección de áreas hiperbólicas iguales. Los puntos sobre la hipérbola que corresponden a divisiones iguales del área se proyectan sobre el eje al dibujar líneas perpendiculares desde el eje hasta esos puntos. Esto produce las longitudes, Ob, Oc, Od. Oa = 1.
Figura 8b Medición entre la hipérbola y la catenaria. Cuando las líneas perpendiculares al eje se extienden hasta intersecar la asíntota, producen las longitudes (2^a + $½^a$). Por inversión, las longitudes correspondientes sobre el eje son proyecciones de estas longitudes en un ángulo de 45 grados. Por tanto, las longitudes Ob, Oc y Od son iguales a (2^a + $½^a$)/2.
Figura 8c Relación entre la hipérbola y la catenaria. Cuando los puntos a,b,c y d se proyectan hasta la asíntota, forman las longitudes a" = 1; b" = (21 + ½1)2; c" = (22 + ½2)/2; d" = (23 + ½3)/2.

Las implicaciones de este descubrimiento quedan mas claras cuando las vemos desde la perspectiva de las investigaciones de Gauss sobre las superficies curvas, que surgen de su trabajo previo sobre geodesia, astronomía, el teorema fundamental del álgebra y los residuos bicuadraticos. Para completar esta discusión, concéntrate en la ampliación de Gauss de la investigación sobre las curvas, a la investigación de las superficies que las contienen. A las superficies que contienen curvas con las características de la hipérbola o la catenaria, Gauss las llamo curvas "negativas", mientras que las superficies formadas por curvas con las características de los círculos y las elipses, las llamo curvas "positivas" (ver figuras 9ª y 9b).

Figura 9ª Curvatura negativa: la catenoide
Figura 9b Curvatura positiva: la elipsoide

Ahora, vuelve a pensar en esta fuga de 25 siglos. El principio que subyace en las construcciones de Arquitas y Menecmo; la discontinuidad que expresa el límite infinito entre la hipérbola y la parábola; la inversión de la geométrica y la aritmética en la hipérbola: desde la perspectiva de Gauss, todo esto refleja una transformación entre la curvatura negativa y la positiva.

Por tanto, para investigar la acción en el universo físico, es necesario ampliar la investigación, de la simple extensión a una curvatura, y de las simples curves a las superficies que las contienen. Esto solo puede hacerse desde la perspectiva del dominio complejo de Gauss y Riemann.

Notas
1. Cabe señalar que este descubrimiento ha sido victima del difundido asalto de Euler y Lagrange, mismo que Felix Klein y demás perpetuaron en el siglo 20, y la mera discusión de esto con cualquiera expuesto a una educación matemática académica de seguro provocara graves ataques de ansiedad.
2. –La razón para los nombres "negativa" y "positiva" será discutido en futuras pedagógicas.

Riemann Anti-tontos parte 34
Poder y Curvatura

En su disertación de habilitación de 1854, Berhnard Riemann habló de la doble tarea implicada en disipar más de 2,000 años de oscuridad que se había asentado sobre la ciencia:
"Desde Euclides hasta Legendre, por nombrar al más conocido de los nuevos escritores de geometría, esa oscuridad no ha sido disipada ni por los matemáticos ni por los filósofos que se ocuparon en ello. La razón fue probablemente que el concepto general de magnitud múltiplemente extensa, bajo el que están contenidas las magnitudes espaciales, permanecía sin desarrollar. Por ello me he propuesto en primer lugar la tarea de construir, partiendo de conceptos generales de magnitud, el concepto de una magnitud múltiplemente extensa. De ello resultará que una magnitud múltiplemente extensa es susceptible de diversas relaciones métricas, de modo que el espacio solo constituye un caso especial de magnitud triplemente extensa. Una consecuencia necesaria de ello es que los teoremas de la geometría no se pueden deducir de conceptos generales de magnitud, sino que aquellas propiedades por las cuales el espacio se diferencia de otras magnitudes triplemente extensas concebibles, solo pueden ser tomadas de la experiencia. Surge así el problema de buscar los hechos más simples a partir de los cuales pueden determinarse las relaciones métricas del espacio, un problema que, por la naturaleza misma del asunto, no está totalmente determinado; pues se pueden indicar diferentes sistemas de hechos simples que son suficientes para la determinación de las relaciones métricas del espacio; el más importante para el objetivo presente es el que Euclides tomó como base. Como todos los hechos, estos no son necesarios sino sólo tienen certeza empírica, son hipótesis…"

Para comprender la importancia del "Plan de Investigación "de Riemann, se debe reconocer que los 2,000 años de oscurantismo de los que habla, fueron, como los fundamentos de la geometría euclidiana, no necesarios. El culto-creencia romántico de que las definiciones, axiomas y postulados de Euclides, eran condiciones *a priori*, necesariamente fijas e inmutables del universo, nunca tuvo alguna base en la verdad. Fue una doctrina falsa impuesta por un sistema imperial, que requirió la amplia aceptación de la creencia de que el universo estaba gobernado por fuerzas más allá de la comprensión y el control humano, y que esas fuerzas solamente podían ser administradas por una autoridad oligarca. Los edictos de esta oligarquía, como las definiciones, axiomas y postulados de la geometría euclidiana, fueron sentados y sostenidos como dados, no requiriendo, ni siendo susceptibles de prueba. Fueron simplemente, "la forma en como son las cosas."

Esta visión fue expresada sucintamente por el embaucador, Claudio Ptolomeo, quien impuso la concepción geocéntrica, fija, del sistema solar cognosciblemente falsa. Ptolomeo, de acuerdo con Aristóteles, justificó su ataque sobre la probablemente verdadera concepción heliocéntrica de Aristarco, como una consecuencia necesaria de su visión del Hombre. En la introducción a su *Almagesto*, Ptolomeo declara que el conocimiento, tanto de Dios como del principio físico, es imposible. El único conocimiento accesible al hombre era, lo que

Ptolomeo llamó “matemático”, esto es, conocimiento que sigue lógicamente de un conjunto dado de axiomas, definiciones y postulados. Estos axiomas, definiciones y postulados en si mismo no pueden ser probados. Como tales, su autoridad no reside en verdades demostradas, sino en el poder arbitrario de quien decrete su primacía. La perversidad no proviene de los axiomas, postulados y definiciones en sí mismos, sino en la aceptación del método de que el conocimiento solo puede derivarse de ellos.

La aceptación popular del oscurantismo introducido por el dominio del método Aristotélico fue una degeneración trágica de un concepto superior del hombre y el universo desarrollado en la Grecia Clásica, desde Pitágoras hasta el asesinato de Arquímedes. Los *Elementos* de Euclides, en forma extraña, demuestran esto en si mismos. Leídos en su orden acostumbrado, los *Elementos* proceden a partir de las definiciones de punto, línea, superficie, y sólido, como objetos de 0, 1, 2, y 3 “dimensiones”, y de ciertos postulados sobre lo ilimitado de esos objetos. De ahí se desarrolla un conjunto de teoremas que elaboran las posibles acciones en un universo conforme a las restricciones contenidas en las dudosas definiciones, axiomas y postulados iniciales.

Pero leídos de atrás hacia adelante, los *Elementos* de Euclides empiezan a revelar una comprensión totalmente diferente del universo. Los *Elementos* terminan en donde debieran empezar –con la construcción de los cinco sólidos regulares (platónicos) de las características de la acción esférica. Esta investigación conduce al descubrimiento de magnitudes de poderes diferentes, como se muestra en el problema de doblar la línea, el cuadrado y el cubo. Las relaciones entre estos poderes, hacen surgir proporciones llamadas medias aritmética, geométrica y armónica, y a los números primos y las relaciones entre ellos. Solo entonces se hacen las investigaciones concernientes al reflejo de esas relaciones en un plano. Solo al final, deberíamos arribar al punto, la línea, la superficie y el sólido. Visto en esta forma, estos objetos son conceptos que surgen de un principio superior—la acción que produjeron los cinco sólidos regulares de una esfera- - no como objetos creados por decretos arbitrarios desde abajo, en forma de axiomas, definiciones y postulados.

(Es desde este punto de vista que Kepler inicia su *Armonía del Mundo* con una fuerte denuncia de Pedro Ramus, el principal aristotélico de esos días, quien busco prohibir los libros del 10 al 13 de Euclides).

Este principio se demuestra de manera similar por las investigaciones Pitagóricas-Platónicas de doblar la línea, el cuadrado y el cubo. Como se ha discutido en pedagógicas previas, cada objeto se genera por magnitudes de poderes sucesivamente superiores. La relación entre estos poderes superiores se refleja por las proporciones aritmética y geométrica. Inicialmente, parece que cada poder está asociado simplemente con un incremento en extensión. Por ejemplo, la magnitud que dobla al cuadrado es inconmensurable con la magnitud que dobla a la línea,

Riemann Para Anti-Tontos Parte 35

La mente como poder generador

Rene Descartes (1596-1630) fue, por intención y propósito, un Bogomil, La geometría que lleva su nombre, es un lavado cerebral. Todo el que se exponga a ella, a menos que se le cure, sufrirá de deficiencias cognoscitivas. Los síntomas incluyen impotencia y una incapacidad de distinguir la fantasía de la realidad.

Cuando Godolfredo Leibniz le escribió a Molanus en 1679, reconoció los efectos destructivos del cartesianismo. “Los cartesianos no son capaces de descubrir; ellos solamente se toman el trabajo de interpretar o comentar sobre su maestro, como los Escolásticos los hacían con Aristóteles. A habido muchos descubrimientos maravillosos desde Descartes, pero, hasta donde se, ninguno a venido de un verdadero Cartesiano… Descartes mismo tenia una mente bastante limitada.”

El método de Descartes es impotente. Le falta el poder. Regresando a las investigaciones sobre la materia de doblar la línea, el cuadrado y el cubo de los pitagóricos, Arquitas, Menecmo y Platón. Estos descubrimientos demostraron, la relación entre los objetos y los principios que los generan. Cada principio pose un poder característico. La sucesión de objetos – líneas, cuadrados y cubos – son producidos por una sucesión de poderes superiores (dunamis). Los objetos no definen los poderes, los poderes producen los objetos. No se pueden conocer los poderes a través de los sentidos. Sin embargo, las características de los poderes físicos se hacen sensibles a través de su armonía, la cual solamente la mente tiene el poder de alcanzar.

Como se puede ver desde la solución para doblar el cubo de Arquitas y Menecmo, la relación armónica entre estos poderes refleja una curvatura característica, que cuando se proyecta sobre líneas rectas, produce las relaciones que los Pitagóricos reconocieron como las medias aritmética, geométrica y sub contaria (o armónica). La media aritmética son tres números relacionados por una diferencia común: $c-a = b-c$, o, $c = ½(a+b)$. Esto se representa geométricamente por el punto medio a lo largo de una línea; musicalmente corresponde al intervalo de la 5ta. La media geométrica son tres números en proporción constante: $a : b : : b : c$. Se representa geométricamente por el cuadrado medio entre dos cuadrados; musicalmente corresponde al intervalo Lidio. La media armónica es la inversa de la media aritmética: $1/c = ½(1/a+1/b)$. Esto se expresa geométricamente en la hipérbola y musicalmente por el intervalo de la cuarta. Estas relaciones armónicas son sombras numéricas que lo curvo proyecta en lo recto. (Ver Riemann Anti-Tontos 33)

Riemann generalizó este descubrimiento Griego con su noción de magnitud múltiplemente extensa, la línea es un instrumento de multiplicidad simplemente extensa, el cuadrado un instrumento de una multiplicidad doblemente extensa, y el cubo de una multiplicidad triplemente extensa. Para Riemann, como para Pitágoras, Arquitas, Menecmo, Platón, etc. cada incremento del grado de extensión, de “n” a “n+1”, ocurre por la suma de un nuevo principio, no una nueva “dimensión” independiente. En consecuencia, una línea no puede producir un cuadrado, ni un cuadrado un cubo, porque son principios diferentes los que generan la línea, el cuadrado y el cubo. Así, Riemann también dejo claro, que la sola extensión es insuficiente para determinar la geometría física. Se necesita otro principio: curvatura física. (Ver Riemman Anti-Tontos, Partes 28, 29, 33, 34).

En el mundo creado de Descartes, el concepto de poder es extirpado. En el inicio de su tratado sobre geometría analítica dice: "Cualquier problema en geometría se puede reducir fácilmente a términos con los cuales sea suficiente un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas para su construcción".

Como un verdadero Bogomil, Descartes es perverso. Comienza al revés, tontamente, con las relaciones numéricas, despojándolas de su poder, y pretendiendo generar curvas a partir de estas relaciones numéricas que escribió como ecuaciones algebraicas. Esto es un fraude total ya que Descarte nunca derivo curva alguna de esas ecuaciones. Apolonio ya había descubierto todas las relaciones numéricas con sus investigaciones sobre la relación entre curvatura y poder. Descartes nunca género una curva cuya relación armónica no hubiera sido ya descubierta por los griegos. La intención de Descartes fue despojar a la geometría del poder de las ideas y la idea de poderes.

Para ilustrar concretamente este punto, veamos la solución de Menecmo para el problema de doblar el cubo, presentada en Riemann para anti-tontos parte 33. Menencmo demostró que la magnitud que dobla el cubo se genera en la intersección de una parábola y una hipérbola. Cada curva involucra un conjunto de proporciones diferentes que surgen cuando la curva se combina con la recta. Por ejemplo, la hipérbola se forma trazando el recorrido que sigue uno de los vértices de un rectángulo cuyos lados cambian de tal manera que el área permanece la misma. La parábola se forma trazando el recorrido que sigue el vértice de un rectángulo en el cual uno de sus lados siempre es el cuadrado del otro. Los rectángulos están hechos de líneas rectas y la curva determina su proporcionalidad. Las curvas poseen el poder de producir esa proporcionalidad, y ese poder se expresa en la relación entre la curva y las líneas rectas que esta produce. En otras palabras, solamente un estafador o un tonto pueden separar la curva, las líneas rectas y la proporcionalidad que produce esta acción compleja. Como demostró Menencmo, cuando se combinan la hipérbola y la parábola la proporcionalidad resultante expresa un poder superior al que existe en cada curva independiente.

Para Descartes, las líneas rectas son entes independientes, creadas sin razón. Las curvas y los poderes asociados se derivan de esas líneas rectas. Descartes confesó: "Aquí se debe observar que para a^2, b^3, y expresiones similares, me refiero a simples líneas, que llamo de cualquier manera cuadrados, cubos, etc., para poder hacer uso de los términos empleados en el álgebra". Así, el mundo de fantasía hecho de la creencia de líneas rectas independientes se toma como primario y el mundo real de acción física es solamente una desviación del mundo de fantasía. Y como Leibniz declaro, esta forma de pensar es incapaz de producir descubrimientos, la única intención de esas enseñanzas es condicionar a los estudiantes a la creencia de que el mundo de fantasía es más poderoso que la realidad. (La obsesión popular de los sesenta y ocheros de que el dinero es igual a seguridad económica es un resultado típico de este tipo de educación).

Para derivar esta creencia y preparar los cimientos para estudiar la geometría diferencial física de Riemann, veamos ejemplos físicos: la sección cónica orbital de un cuerpo celeste alrededor del sol; la catenaria; y el Geoide de Gauss.

En el primer caso, el cuerpo celeste se conforma a una trayectoria curva única alrededor del sol, que Kepler y Gauss demostraron era una sección cónica, con el sol en un mismo foco para todas las orbitas. Así, las orbitas definen una trayectoria físicas, y el sol un origen físico. Las líneas rectas que tienen importancia física son las que se relacionan con la acción física. Por ejemplo, el eje mayor de una orbita elíptica es la línea que conecta los puntos de velocidad máxima y mínima, que son también los puntos de máxima curvatura. El parámetro de la orbita es la línea que cruza el sol perpendicular al eje mayor de la sección cónica. El eje menor de la orbita elíptica es la línea que conecta los puntos de mínima curvatura de la orbita. Estas líneas expresan las relaciones armónicas de las medias aritmética, geométrica y armónica, que a su vez reflejan los poderes superiores, la "razón" por la cual la orbita del planeta toma esta forma. (Ver Apéndice de "Como Gauss Determinó La Orbita de Ceres", Fidelio Verano 1998)

Ahora veamos la catenaria. A pesar de la jactancia de Descartes de que su método puede resolver cualquier problema en geometría, la cadena colgante lo probó equivocado. La catenaria presenta un problema diferente al de las secciones conicas orbitales. No se ajustaba a ninguna figura geométrica conocida, así que tendríamos que descubrir su naturaleza a partir de sus características físicas. Esto le presentó un problema a Descartes porque a menos que se conociera la naturaleza de la curva, el no podría determinar en donde poner sus líneas rectas.
Leibniz y Bernoulli demostraron, que la naturaleza física de la catenaria se expresa en la relación entre cualquier punto de la cadena y el punto mas bajo. Las tangentes a la curva en esos dos puntos miden esta relación. (Ver "Justicia para la Catenaria") La tangente al punto mas bajo siempre es perpendicular a la atracción de la gravedad, es decir, horizontal. La relación de la fuerza entre cualquier punto sobre la catenaria y su punto mas bajo, se mide con los senos de los ángulos que forman las tangentes en estos dos puntos, y una línea vertical dibujada desde el punto mas bajo. En otras palabras, la acción física en cualquier punto de la catenaria, se expresa como una relación "diferencial" entre los ángulos que forman estas tres líneas. La tangente horizontal al punto más bajo, perpendicular a la atracción de la gravedad; una línea vertical dibujada desde ese punto, que va en dirección de la atracción de la gravedad, y la tangente al punto sobre la curva.

Leibniz y Bernoulli mostraron que este cambio "diferencial" no encajaba en ninguna descripción algebraica de curvas que se conociera previamente. Este no existe en el mundo de Descartes. Descartes no podría determinar como construir esta curva a partir de líneas rectas. (Cualquier adoctrinado en el método de Descartes se comenzara a sentir muy incomodo ahora) Pero, obviamente la cadena existe en el mundo real. Como acabamos de ver, las únicas líneas que tienen importancia son las que se determinan físicamente por la relación cambiante de la catenaria a la atracción de la gravedad y la perpendicular a esa atracción. La geometría Cartesiana no es la que determina esta relación, ésta esta determinada por la curvatura física de la atracción de la gravedad. Leibniz y Bernoulli demostraron, que las funciones exponenciales e hiperbólicas expresan esta relación, siendo estas dos funciones expresiones de una sucesión de poderes superiores, y como tales, no descubrirles por el método Cartesiano. (Ver Riemann para Anti-tontos 33. EIR website.)

El geoide de Gauss presenta un tipo de problema diferente. En los dos ejemplos anteriores, el "diferencial" de acción estaba a lo largo de una trayectoria determinada por el principio de gravitación universal. En estos casos, el "diferencial" se podía determinar de acuerdo a una magnitud doblemente extensa. (El eje mayor y parámetro de la orbita y la atracción de la gravedad y su perpendicular a la catenaria.) En la determinación de la forma de la Tierra, Gauss enfrento un nuevo principio adicional. En vez de medir una trayectoria en una superficie simplemente extendida, el midió cambios de la superficie misma. Para propósitos pedagógicos, piensa en medir un triángulo sobre una esfera perfecta. ¿Cómo cambia la forma del triangulo conforme el área aumenta? Compara esto con la medición de un triangulo sobre una superficie irregular, como una sandia. En la esfera, los lados de los triángulos cambian porque son círculos en todas direcciones. Sin embargo, sobre una sandia, los lados del triangulo cambian de acuerdo a un principio diferente que depende de la dirección. Para medir este tipo de cambios, Gauss invento un nuevo tipo de diferencial compleja, que será desarrollada más ampliamente en futuras pedagógicas.

Para resumir el asunto epistemológico surgido en esta pedagógica, citaremos la disputa de Leibniz a Descartes sobre Teoría del movimiento:

"Hubo un tiempo en el que creí que todo fenómeno de movimiento se podía explicar basado en principios puramente geométricos, sin asumir proposiciones metafísicas…Pero, después de una meditación mas profunda, descubrí que es imposible, y aprendí una verdad superior a toda la mecánica, a saber, que efectivamente, cualquier cosa en la naturaleza puede explicarse mecánicamente , pero que los principios del mecanismo mismo dependen de principios metafísicos y en cierta manera morales, esto es, en la contemplación del hacedor mas perfectamente eficiente y causa final, a saber, Dios…

"...descubrí que esta, por decirlo de alguna manera, inercia de los cuerpos no se puede deducir a partir de la noción inicialmente asumida de materia y movimiento, donde se entiende la materia como aquello que se extiende o llena el espacio, y el movimiento como el cambio de espacio o lugar. Sino que mas bien, sobre todo lo que se deduce de la extensión y su variación o modificación en sí, debemos agregar y reconocer en los cuerpos ciertas nociones o formas inmateriales, por decirlo de alguna manera, o independiente de extensión, que podemos llamar poderes, por medio de los cuales la velocidad se ajusta a la magnitud. Estos poderes no consisten en el movimiento de hecho, no en conatus o el principio del movimiento, sino en la causa o en esa razón intrínseca del movimiento que es la ley que se requiere para continuar. Y los investigadores han errado en la medida en que consideran el movimiento, pero no la fuerza motriz o la razón del movimiento que aun cuando se derive de Dios, autor y gobernador de cosas, no se debe entender como siendo Dios mismo, sino que se debe entender como que El lo produce y conserva en las cosas. De aquí mostraremos también que no es la misma cantidad de movimiento (lo qué engaña a muchos), sino los mismos poderes que se conservan en el mundo."

Riemann Anti-Tontos Parte 36

Trascendentales Armónicos

Los descubrimientos que indicaban la existencia de lo que Gauss más tarde llamó el dominio complejo se iniciaron con los Pitagóricos y sus seguidores en el siglo VI antes de Cristo. Estos descubrimientos, que incluyen las proporciones de los intervalos musicales, el doblar la línea, el cuadrado y el cubo, los cinco sólidos regulares y muchos otros, demostraron que los principios universales se expresan en el mundo de sombras de los sentidos mediante proporciones armónicas. Aún cuando, en todos los casos, la armonía nunca es completa. Siempre hay algunas pequeñas discrepancias, algunas disonancias paradójicas, que indican un principio aun por descubrir. Esta es la razón, por la cual Pitágoras las llamo "ciencia o investigación" geométrica, y de acuerdo a Proclo, pensó que cada descubrimiento, "es un escalón para ascender mediante el alma a lo superior, en lugar de rebajarse a los objetos sensibles y devenir en un siervo de las necesidades comunes de esta vida mortal."

La disonancia más persistente conocida por los Pitagóricos no se resolvió sino hasta 2,500 años más tarde, cuando Bernhard Riemann, en su disertación doctoral de 1851, notó que en las magnitudes del dominio complejo de Gauss "emerge una regularidad y armonía que de otra forma permanecería oculta.

Para descubrir estas armonías ocultas, primero, deberemos revisar minuciosamente algún descubrimiento que creó un paradigma en el cual se presentó la disonancia:

Pitágoras descubrió que los intervalos musicales concordantes corresponden a las proporciones, 2:1, 3:2, 4:3, que produce una cuerda vibrante. Estas proporciones producen los intervalos conocidos como la octava, la quinta y la cuarta respectivamente. Más importante aún, los pitagóricos también descubrieron que si estas proporciones se extendían simplemente, surgía una discrepancia llamada la Comma Pitagórica. (Ver pedagógica de Fred Haight). Sin embargo, las ideas se transmiten por la poesía de la voz cantante humana y no por una cuerda vibrante. La comma, por ende, no es una deficiencia. Es una indicación de que existe un principio superior, un principio que realmente gobierna las armonías musicales, pero que no se puede derivar de la multiplicidad de las cuerdas vibrantes. Sólo puede derivarse de la multiplicidad que ha llegado a conocerse como el sistema bien-temperado del bel-canto polifónico, del cual se pueden trazar muchas analogías con el dominio complejo.[1]

Proporciones armónicas similares se expresan mediante los principios que gobiernan la extensión de una línea, un cuadrado y un cubo. La extensión de una línea produce relaciones que los pitagóricos llamaron "aritméticas", que corresponden al intervalo musical de una quinta. La extensión de un cuadrado produce relaciones llamadas por los pitagóricos "geométricas" que corresponden al intervalo musical Lidio. Mientras que las relaciones aritméticas y geométricas son armónicas en su propio dominio individual, juntas forman una disonancia, expresada como una inconmensurabilidad entre magnitudes aritméticas y geométricas. Esta disonancia indica, como lo notó Platón, que la línea y el cuadrado se producen con principios de “poderes” diferentes.

La extensión del cubo produce un tercer “poder” superior, que no puede generarse por la línea o el cuadrado. Sin embargo, este poder se expresa en el dominio inferior del cuadrado por dos medias geométricas entre dos extremos. Pero, como lo muestran los descubrimientos más notables de Arquitas y Menacmo, la construcción de las magnitudes de este tercer poder, no se pueden generar por el cuadrado entre las sombras en que se desenvuelve. Solo una forma superior de curvatura genera este poder cúbico, como la asociada con las secciones cónicas y el toro.

Platón entendió que las extensiones de la línea, el cuadrado y el cubo denotaban una sucesión de poderes superiores distintos. Mas tarde, Leibniz descubrió un principio aún superior que trascendía a todos estos poderes. Llamó a este principio trascendental “exponencial” o, inversamente, “logarítmico”, cuyo significado devendrá más claro adelante.

Otra clase de proporciones armónicas investigadas por Pitágoras y sus seguidores, se asocian con los cinco sólidos regulares y la constructibilidad de los polígonos regulares. Los sólidos regulares y sus polígonos construibles como artefactos, se produjeron por las divisiones armónicas de la esfera y el círculo. Empero, estas divisiones armónicas están limitadas. Sólo hay cinco divisiones regulares de la esfera y por lo menos, hasta donde los pitagóricos llegaron, los polígonos construibles se limitaron al triángulo, el cuadrado y el pentágono y ciertas combinaciones de los mismos.[2] Los límites que se confrontan por las divisiones de la esfera y el círculo expresan una disonancia con respecto a las armonías que gobiernan aquellas divisiones.

Esta clase general de principios que se asocian con las divisiones de la esfera y el círculo también comprenden una clase de trascendentales llamadas “trigonométricas”.

La unidad entre estas dos clases de trascendentales ejemplifica la armonía que de otra forma estaría oculta, a la que Riemann hizo referencia en su disertación.

El primer paso hacia la elaboración de esta unidad, lo dio Nicolás de Cusa, quien, citando a Pitágoras, reconoció que todos los principios universales se expresan armónicamente en el dominio de los sentidos. Pero, Cusa hizo énfasis en que solo las magnitudes trascendentales son capaces de expresar estas armonías, tipificadas por las disonancias que identificamos en los ejemplos anteriores. Así, Cusa presentó la proposición paradójica de que el arte de la ciencia es buscar las disonancias y descubrir los principios trascendentales que les dan armonía.

Johannes Kepler, aplicando el descubrimiento de Cusa proporcionó la primera demostración crucial experimental, de que los principios físicos sólo pueden conocerse a través de la armonía trascendental. Esto comienza con su descubrimiento de la correspondencia armónica entre los sólidos regulares y las órbitas aproximadas de los seis planetas visibles (conocidos en ese tiempo), Como Kepler, declaró, este descubrimiento dependió del énfasis de Cusa sobre la disonancia entre la curva (esférica) y la recta (plana). El descubrimiento posterior de Kepler de la excentricidad de las orbitas planetarias, expresó otra armonía a través de una disonancia. A diferencia de las órbitas circulares, las divisiones regulares de un movimiento excéntrico dependen no de los ángulos sino del seno de los ángulos, el cual es trascendental al ángulo. Además, Kepler demostró que las relaciones armónicas entre las excentricidades orbitales de todos los planetas dependen no de las armonías simples de una cuerda vibrante sino de las disonancias que muestra la comma pitagórica (ver “Cómo Gauss determino la orbita de Ceres” *Fidelio* verano de 1998).

La prueba de Fermat de que el principio que gobierna la propagación de la luz corresponde al tiempo mínimo y no a la distancia mas corta, es otra demostración experimental de acción física que no depende de la igualdad de los ángulos sino de la proporcionalidad del seno.

En resumen, los descubrimientos de Kepler y Fermat demuestran que las relaciones armónicas en el universo físico no son, como lo indicó Cusa, expresables en números de precisión calculable, sino sólo mediante cantidades trascendentales como disonancias polifónicas.

La colaboración entre Leibniz y Bernoulli al investigar el principio que gobierna a una cadena colgante, proporcionó el paso crucial para el descubrimiento de Riemann.

Como se detalló en otras pedagógicas, la aplicación por parte de Bernoulli de los principios del cálculo de Leibniz, demostraron que los principios físicos que determinan la forma de la cadena colgante se expresan por la proporcionalidad de los senos de los ángulos formados por la cadena y la singularidad física ubicada en el punto mas bajo de la cadena. (ver figura 1).

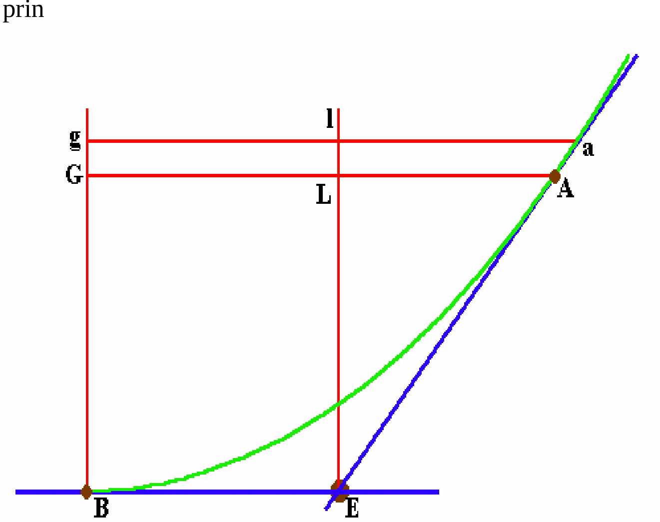


Figura 1. La cadena colgante asume la forma que iguala la tensión en todos los puntos. Esto conforma la misma acción física como si el peso de la cadena estuviera concentrado en la intersección (E) de dos tangentes de la curva. Desde el punto mas bajo, el punto B, la cadena desdobla a través de A así que los senos del ∟AEL y ∟EAL son proporcionales.

Por otro lado, Leibniz demostró que este mismo principio físico también se expresa como una función exponencial. (ver figura 2).

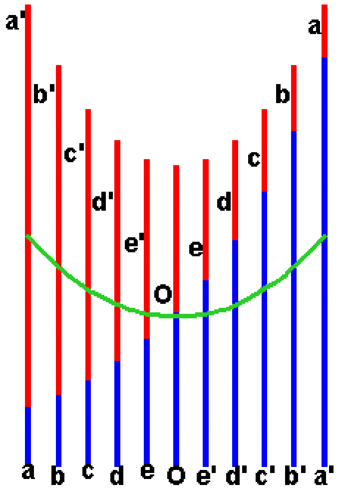


*Figura 2. La catenaria se forma como la media aritmética entre dos curvas que Leibniz llamó "logarítmica", y hoy es llamada exponencial. En la figura, las líneas azules están igualmente espaciadas a lo largo del eje horizontal. La curva "logarítmica" se forma por las longitudes verticales que están en proporción geométrica. La catenaria se forma por sumar la longitud **a** a **a'** y dividiendo la longitud combinada entre dos; después sumando la longitud **b** a **b'** y dividiendo la longitud combinada entre dos, etc.*

Así, la catenaria expresa un principio físico unificador entre lo que pareciera ser dos clases diferentes de trascendentales: las trigonométricas y las exponenciales. La unidad, como lo indica Riemann, sólo surge cabalmente cuando se ve desde el punto de vista del dominio complejo de Gauss.

El medio para descubrir esa unidad armónica, como en una composición musical, es por inversión.

Recuerda que las funciones exponenciales y trigonométricas surgieron por primera vez como disonancias incrustadas en las relaciones armónicas entre objetos en el dominio visible. Ahora, piensa en esos objetos como artefactos de las disonancias, en lugar de las disonancias como artefactos de los objetos.

Por ejemplo, piensa en el círculo como un artefacto de las trascendentales trigonométricas y en la línea, el cuadrado y el cubo, como artefactos de la función trascendental exponencial. (ver animación 1 y 2).

Como Cusa indicó, esto plantea la dificultad de forzar a la mente a alejarse de las simples proporciones armónicas entre los objetos del espacio visible y acercarse a las proporciones armónicas trascendentales entre los principios que los generan.

Si usamos el principio de la catenaria como pivote, podemos presentar, por lo menos en una forma intuitiva, la armonía de la que habla Riemann. Dejaremos para futuras pedagógicas una demostración mas completa y para discusiones orales que provocarán estas pedagógicas indudablemente.

Como notamos previamente, la catenaria expresa las funciones tanto trigonométricas como exponenciales. De esta forma, la catenaria, como el principio de acción física mínima, subsume ambos principios de longitud constante (círculo) y área constante (hipérbola). (ver figura 4).

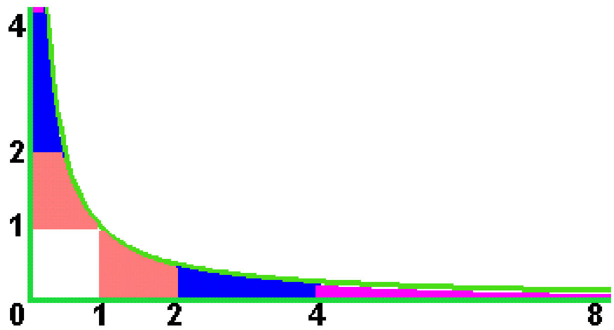


Figura 4.

Leibniz añadió a esto un nuevo concepto crucial: la exponencial es la curva que expresa el principio de cambio auto similar. (ver figura 5). Esto condujo a Leibniz a descubrir un nuevo número trascendental que denotó con la letra "b". (Euler, posteriormente derivó la misma cantidad del álgebra formal y la denoto con la letra "e" que es el utilizado hoy. Es típico de los fraudes académicos actuales atribuir este descubrimiento al formalismo de Euler y no a la idea Socrática de Leibniz.)

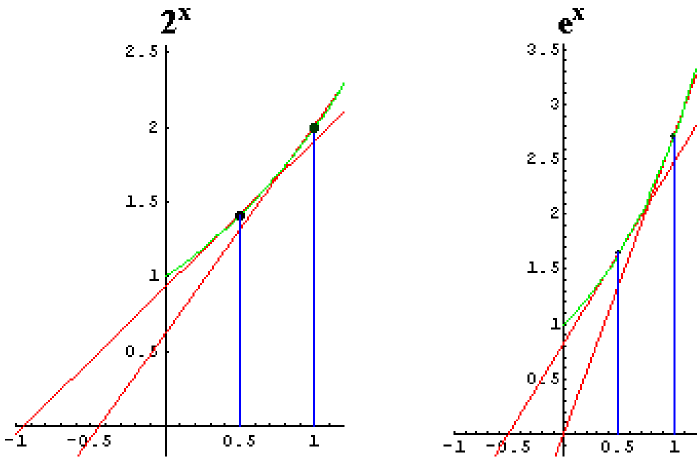


Figura 5. Todas las curvas exponenciales tienen subtangentes constantes.
El número trascendental e tiene subtangente = 1.
La subtangente es la proyección de la tangente sobre el eje horizontal.

Previamente hemos visto como las funciones exponenciales que se derivan de la catenaria generan la hipérbola. Pero la exponencial también genera el círculo, cuando se le piensa como si este fuera un caso especial de una espiral exponencial. Ten en mente la relación proyectiva de Kepler entre las secciones cónicas. (ver Riemann para Anti-Tontos parte 33). Para Kepler el círculo y la hipérbola serían los extremos opuestos de una multiplicidad, y como tales expresan un principio generador común. Pero, en esa relación proyectiva, hay una brecha discontinua, una disonancia entre la hipérbola y el círculo, dando la apariencia de que la hipérbola está sobre el "otro lado del infinito" del círculo. Sólo en el dominio complejo de Gauss y Riemann desparece esta brecha y se expresa armónicamente ese principio generador común.

Debido a que tanto el círculo como la hipérbola se generan mediante el principio común que expresan las funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas se pueden representar como funciones complejas. Riemann creó un concepto de funciones complejas como transformaciones que producen multiplicidades de acción, lo cual a su vez produce trayectorias de acción mínima en esa multiplicidad. El estudio de las funciones complejas forma los cimientos del trabajo de Riemann sobre funciones algebraicas, hipergeométricas y abelianas, que elaboraremos en futuras pedagógicas. Como una precondición para un estudio más profundo, proveemos al lector una visión intuitiva de la “de otra manera oculta armonía y regularidad” que surge allí.

Las figuras 6, 7, 8, 9 ilustran el mapeo complejo del seno, coseno, seno hiperbólico y coseno hiperbólico. Como puede verse, las cuatro funciones se expresan como artefactos, no de una hipérbola o un círculo sino como un sistema de hipérbolas y círculos ortogonales.

Figure 6, Sin z

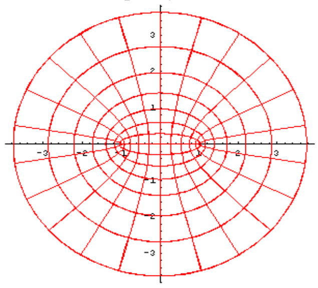


Figure 7, Cos z

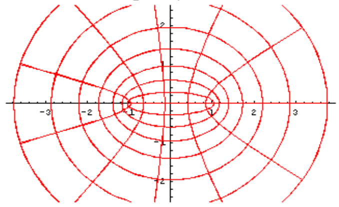


Figure 8, Sinh z

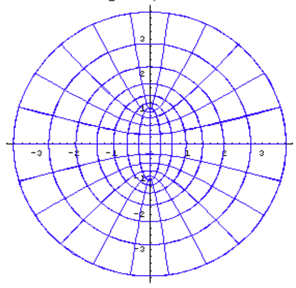
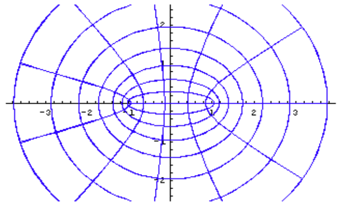
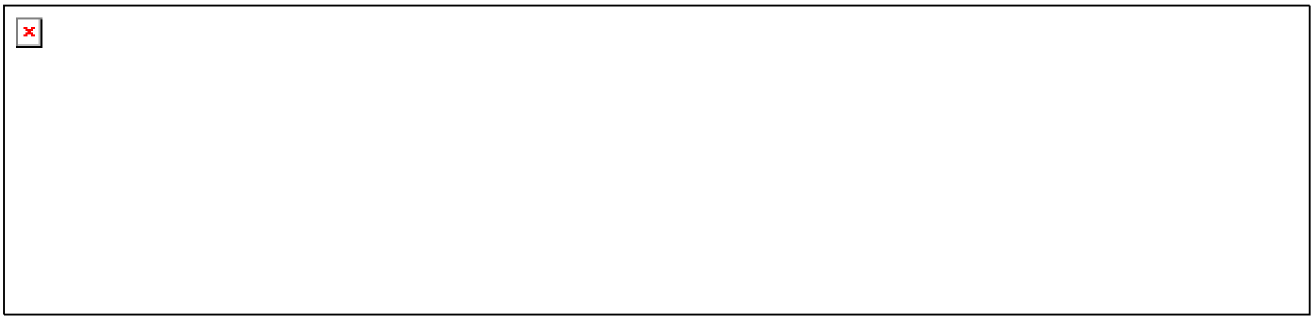


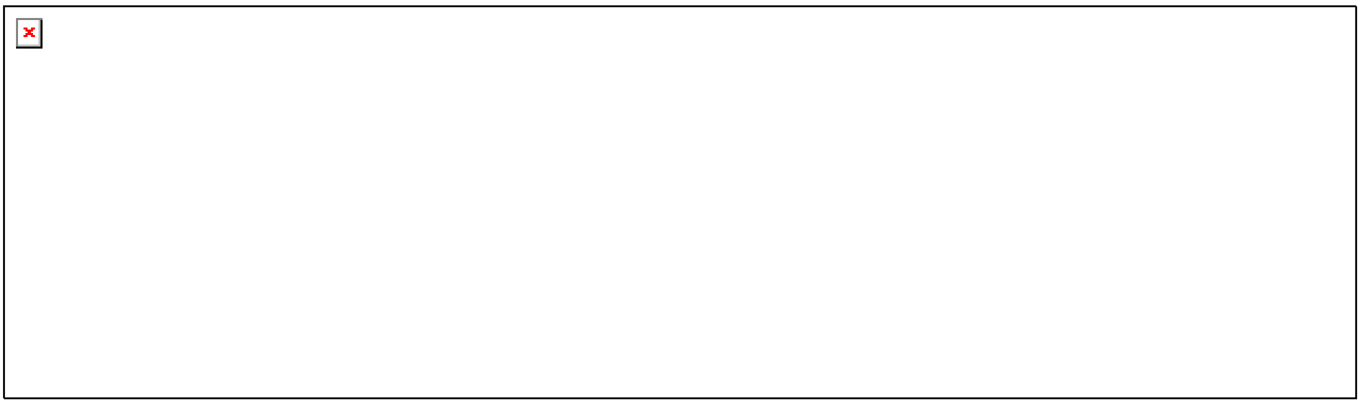
Figure 9, Cosh z



Las figuras 10 y 11, y las figuras 12 y 13 ilustran superficies construidas por el seno complejo, el coseno, el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico. En el dominio visible el círculo es cerrado y periódico, en tanto la hipérbola es infinita. Aunque, cuando los vemos desde el punto de vista del dominio complejo, ambos son periódicos. La forma de la curva surge de la superficie y en ambos casos, ¡ son catenarias ¡

Figuras 10 y 11





Y esto es sólo el comienzo.

Notas

1. La analogía entre la polifonía bien-templada y el dominio complejo se ve más directamente en los cuartetos tardíos de Beethoven. Allí se transforman los límites del medio-tono característicos entre claves continuas y modos adyacentes. Así como las superficies limitan a los sólidos y las líneas a las superficies, Beethoven transforma los modos y las claves de algo limitado a los límites de un sólido" "musical.

2. Uno de los primeros descubrimientos de Gauss del dominio complejo fue que los polígonos construibles incluían el de 17 lados y todos los polígonos con el número primo de lados de la forma $((2^2)^n)+1$.

3. Por generaciones los estudiantes han sido lavados del cerebro por la derivación mística algebraica del Euler de la unidad entre la exponencial y la trigonométrica. La forma algebraica del círculo como la curva de longitud constante es $x^2+y^2=1$ dónde x y y son los lados de un triángulo recto. La expresión algebraica de la hipérbola es $x^2-y^2=1$. Cuando factorizas algebraicamente el círculo produce, $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, mientras la hipérbola produce $(x+y)(x-y)$.

Riemann anti-tontos No: 37

El dominio de la posibilidad

Platón, en las "Leyes", hablando a través de la voz de un extranjero ateniense, sostiene que es indispensable para los líderes de la sociedad poseer un conocimiento elaborado de la aritmética, astronomía y las mediciones de líneas, superficies y sólidos. También considera una desgracia para cualquier hombre común la carencia del entendimiento básico de estos mismos temas.

Es siempre mas adecuado que estas palabras deben brotar de alguien que está lejos de casa, porque, como Helga Zepp Laroche demostró tan diestramente en su presentación en la conferencia del día del trabajo de la Junta Internacional de los Comités Laborales, en los tiempos del escrito de Platón, la cultura ateniense se había apartado a sí misma de estos asuntos y se embarcó en esa cadena de eventos que la condujeron a la desastrosa guerra del Peloponeso. Es mas adecuado que Platón hable aquí como un extranjero, mientras lo tres temas comparten un enfoque común sobre la exploración de esos principios universales que gobiernan, pero que no residen en el dominio de los objetos y la censo percepción. Para alguien atrapado en el dominio de los sentidos, esos principios parecen venir de alguna tierra lejana "sobre el horizonte" o "de mas allá del finito". Pero para alguien deseoso de llegar a estas costas no tan distantes, ese lugar es la provincia de la que vienen los principios comunes que hacen posible descubrimientos diversos, como las ideas que fundamentan la República Americana, el concepto Gauss-Riemann del dominio complejo y los cuartetos tardíos de cuerdas de Betohven.

El universo es un lugar maravilloso pero no un lugar "extraño". Como Nicolás de Cusa y G.W. Leibniz repetidamente enfatizaron, nada existe u ocurre en el universo que no sea posible. Le compete a la ciencia, por tanto, descubrir lo que hace que las cosas sean posibles. Al hacerlo, la mente descubre no solo la posibilidad de una cosa particular, sino que también descubre, y cambia, la posibilidad de lo que puede descubrir sobre lo que es posible. De aquí, el énfasis de Platón en el estudio de los temas antes mencionados. Esto es tanto un medio para descubrir lo que hace a estas cosas posibles y una trayectoria para la mente para descubrir como es posible para ella descubrir lo que es posible, y de esta manera, incrementar su poder.

Procedamos con el ejemplo de la medición de la línea, la superficie y el sólido. Como se presento en las primeras pedagógicas cada objeto se hace posible por un principio que pose el poder de producirlo. El poder de generar la línea es diferente, e inconmensurable, con el poder que genera un cuadrado, el cual a su vez es diferente e inconmensurable con el poder que genera un sólido. Esto en sí mismo es un descubrimiento crucial. Pero el descubrimiento más importante viene cuando se plantea la siguiente pregunta: dado que estos tres poderes distintos existen en un Universo ¿Qué sobre el Universo que hace posible estos tres poderes distintos?

La respuesta a este tipo de pregunta no recae en la naturaleza particular de cada descubrimiento sino en la paradoja de que un Universo produce los tres. Como Cusa lo puso en *La Docta Ignorancia*.

"Todos nuestros mas sabios, mas divinos y mas santos doctores estan de acuerdo en que realmente las cosas visibles son imágenes de las invisibles, y que nuestro creador puede verse de modo cognoscible a traves de las cosas creadas, como en un espejo o en una metáfora. Y el que las cosas espirituales (que para nosotros son por si mismas intangibles) puedan ser investigadas metaforicamente, tiene su raiz en las cosas que antes se han dicho. Puesto que todas las cosas guardan entre si cierta proporción (que para nosotros , sin embargo, es oculta e incomprensible), de tal manera que el universo surge uno de todas las cosas y todas las cosas en el maximo uno son el mismo uno. Y aunque toda la imagen parezca acercarse a la semejanza del ejemplar, sin embargo, excepto por la imagen maxima que es lo mismo que el ejemplar en la unidad de la naturaleza, no hay una imagen de tal modo similar, o igual, al ejemplar que no pueda hacerse mas semejante y mas igual infinitamente, …"

El cuadrado esta limitado por líneas, pero esas líneas solo pueden ser producidas desde cuadrados no por líneas solas. La acción de doblar un cuadrado, como descubrieron los Pitagóricos, produce una cierta armonía a la que ellos llamaron geométrica. Contenida en esa serie geométrica está una reflexión de la armonía que dobla el cubo expresado como dos medias geométricas entre dos extremos, en lugar de una media geométrica expresada por el cuadrado. Pero, como los descubrimientos de Arquitas y Menecmo demostraron, la armonía cúbica, aunque reflejada en el proceso de doblar el cuadrado, solo se puede construir por un proceso completamente diferente, aquel asociado con las secciones cónicas. Dado que el cubo puede generar un cuadrado y un cuadrado puede generar una línea, pero no al revés, los tres poderes pueden ser entendidos como fluyendo desde el principio superior de generación expresado por las secciones cónicas. En otras palabras, lo que hace posible a estos tres poderes no se manifiesta sensiblemente en ninguno de ellos. Lo que los hace posibles se manifiesta solo fuera de las líneas, los cuadrados, y los cubos, en el principio de acción expresado en las secciones cónicas.

Ahora, empieza lo bueno, ¿Qué hace posible a las secciones cónicas? Para responder a esta pregunta, uno debe averiguar las contradicciones dentro del dominio de las secciones cónicas. Esto nos llevara directamente al descubrimiento de Gauss del dominio complejo .

Mientras que la cultura griega hizo avances significativos en esta dirección, como se ejemplifica por las Cónicas de Apolonio, los avances mas significativos fueron hechos por el descubrimiento de Kepler de la relación proyectiva entre las secciones cónicas.

Para comprender esto primero piensa sobre las secciones cónicas como lo hizo Apolunio, como las curvas producidas por un plano que corta un conjunto de dos conos unidos en sus ápices. Un plano que corta el cono inferior perpendicular a su eje generara un círculo. Con la inclinación del plano el círculo se convierte en elipse. Cuando la inclinación del plano se hace paralela al lado del cono la elipse deviene parábola. Con una inclinación adicional, el plano ahora intersecta ambos conos, formando una hipérbola. El cono superior siempre estuvo ahí pero no interviene, hasta que se formó la hipérbola.

Desde el punto de vista de la apariencia visual del cono, las cuatro secciones cónicas se forman por un movimiento continuo de un plano que intercepta los conos. Sin embargo, desde aquí nada se puede descubrir sobre lo que hace posible estas multiplicidades cónicas a menos que las paradojas cognitivas, que residen "mas allá de lo finito", sean traídas a lo visible con mayor claridad, metafóricamente.

Para hacer esto, Kepler aplicó el método expuesto por Cusa en *La Docta Ignorancia:*

"Por lo anteriormente dicho consta que el máximo absoluto no puede ser ninguna de aquellas cosas, que son sabidas o concebidas por nosotros, de ahí que como nos proponemos investigar el máximo metafóricamente es necesario trascender la simple similitud. Pues como todas las matemáticas son finitas y no pueden imaginarse de otro modo, si queremos usar cosas finitas para ascender al máximo absoluto, en primer lugar es necesario considerar las figuras matemáticas finitas, con sus características y relaciones. Después, debemos aplicar estas relaciones, de una manera transformada, a las figuras matemáticas infinitas correspondientes. En tercer lugar, debemos, en una forma aún más altamente transformada, aplicar las relaciones de esas figuras infinitas al Infinito simple, el cual es siempre independiente de cualquier figura. En este punto, nuestra ignorancia, será enseñada, incomprensiblemente, como se entiende mas recta y verdaderamente lo mas elevado en tanto buscamos a tientas por medio de la metáfora."

El interés de Kepler en descubrir el principio generador de las secciones cónicas no era un asunto de curiosidad matemática. Su demostración de la naturaleza elíptica de las orbitas planetarias demandaba una compresión superior, mas allá de las simples relaciones matemáticas en y entre las curvas específicas, de ese principio universal (poder) que hace posibles a las secciones cónicas.

Esto le requirió, como indicó Cusa, considerar las relaciones finitas en y entre las secciones cónicas desde el punto de vista del infinito. Mediante la proyección del proceso citado antes de un plano cortando un par de conos en un plano extendido. Kepler mostró el infinito dividido entre el círculo y la hipérbola. Desde el punto de vista de la proyección de Kepler la hipérbola y el círculo estaban sobre lados opuestos del infinito (ver figura 1).

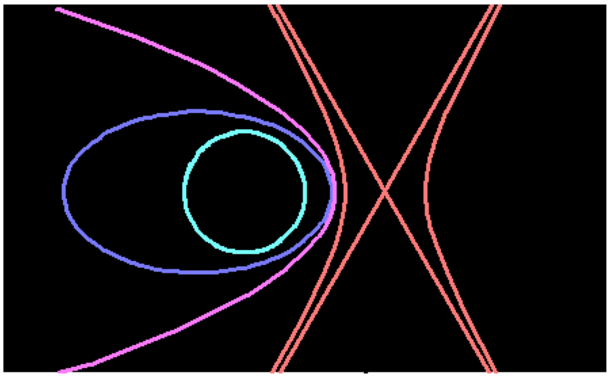


Figura 1. El concepto proyectivo de secciones cónicas de Kepler . Cuando el foco se mueve a la izquierda, el círculo se transforma en una elipse. En el límite con el infinito, la elipse deviene en parábola. La hipérbola se forma sobre el "otro lado" del infinito.

Con esta contradicción llevada a lo visible, se preparo el terreno para Fermat, Huygens, Jacob y Johann Bernoulli y Leibniz para llevar esta paradoja hasta el punto en que demandó el descubrimiento del dominio complejo por Gauss.

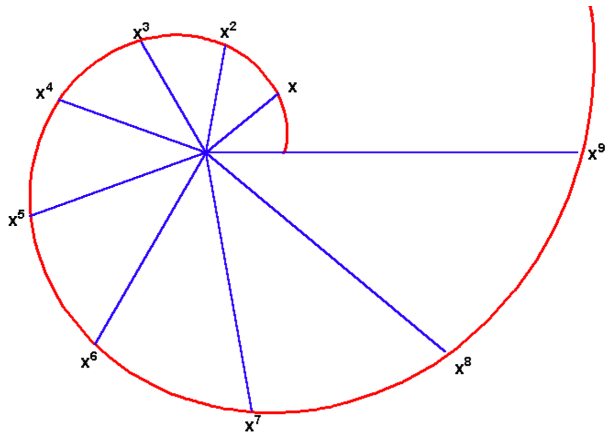


Figura 2

Esto se logró enfocándose en el significado de este infinito dividido entre el círculo y la hipérbola desde el punto de vista de la generación de los poderes de Platón. Por un lado, Jacob Bernoulli demostró que el circulo, como un caso especial de una espiral equiángulas, expresaba el principio trascendental que genera todos los así llamados poderes algebraicos como una función de rotación (Ver Fig. 2) . Por el otro lado, Huygens demostró que la hipérbola expresa el mismo principio como una función de área y longitud (Ver Fig.3).

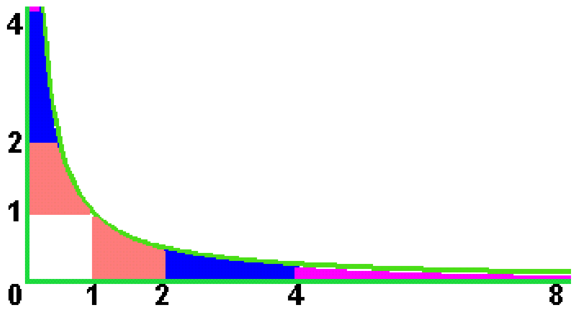


Figura 3.

En esta contradicción, Leibniz descubrió algo adicional. Mientras que el principio circular expresa el número trascendental Pi, el exponencial que hipérbola contiene expresa un número trascendental diferente, que él llamó "b ", (después llamado *e* por Euler). (Ver Fig. 4ª y 4b).

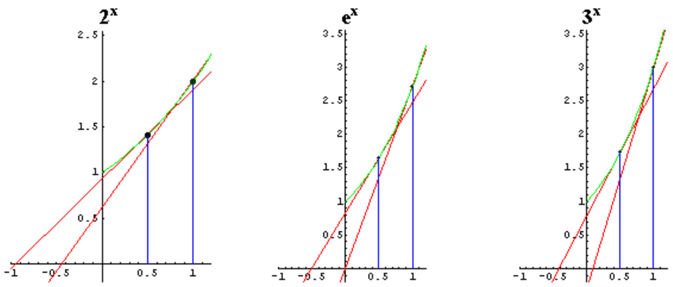


Figura 4ª. Todas las curvas exponenciales tienen subtangentes constantes.
El número trascendental e tiene subtangente = 1.
La subtangente es la proyección de la tangente sobre el eje horizontal.

Logaritmo Hiperbólico

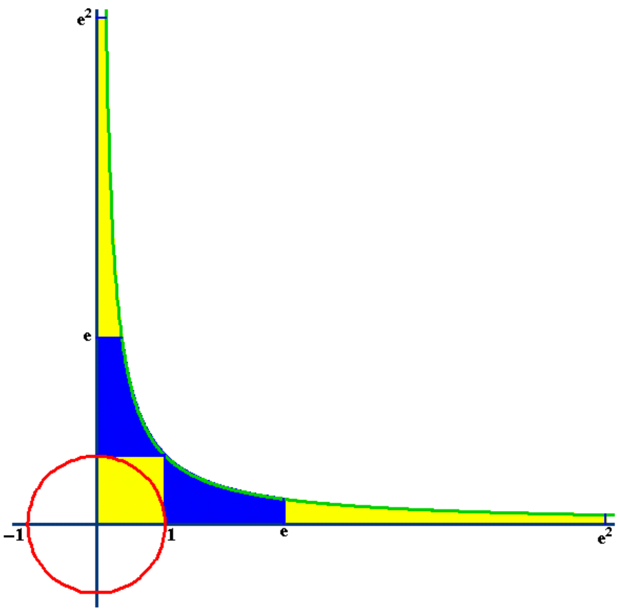


Figura 4b.

Así, tanto el círculo como la hipérbola expresan, en diferentes formas, un principio que tiene el poder de producir todos los poderes algebraicos. Cada uno expresa este poder con respecto a una magnitud trascendental diferente. Una brecha infinita surge entre ellos. La pregunta de nuevo planteada fue, ¿qué principio universal contiene el poder superior que tiene el potencial de generar ambos trascendentales distintos?

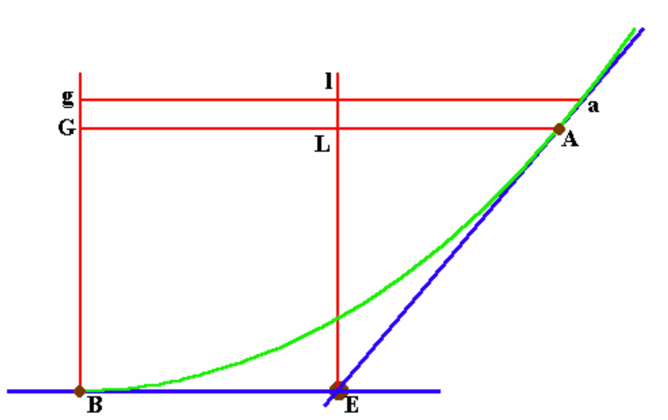
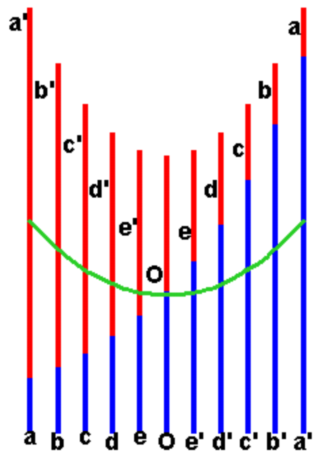


Figura 5ª La cadena colgante asume la forma que iguala la tensión en todos los puntos. Esto conforma la misma acción física como si el peso de la cadena estuviera concentrado en la intersección (E) de dos tangentes de la curva. Desde el punto mas bajo, el punto B, la cadena desdobla a traves de A así que los senos del ∟AEL y ∟EAL son proporcionales.



Para Leibniz, como para Kepler antes, esta pregunta no se plantea como una curiosidad matemática formal. Su descubrimiento, junto con Johann Bernoulli, de la catenaria demostró que el "movimiento congelado" de la cadena colgante expresa, como un principio físico, la unidad simultánea de los trascendentales trigonométrico y exponencial. (Ver Fig. 5ª y 5b). Por lo tanto, la catenaria era la expresión física de un dominio todavía no descubierto, que poseía el potencial de generar todas esas magnitudes trascendentales.

Figura 5b. La catenaria se forma como la media aritmética entre dos curvas que Leibniz llamó "logarítmica", y hoy es llamada exponencial. En la figura, las líneas azules están igualmente *espaciadas a lo largo del eje horizontal. La curva "logarítmica" se forma por las longitudes verticales que están en proporción geométrica. La catenaria se forma por sumar la longitud **a** a **a'** y dividiendo la longitud combinada entre dos; después sumando la longitud **b** a **b'** y dividiendo la longitud combinada entre dos, etc.*

Leibniz entendió que este dominio superior existía fuera de los límites de los sentidos. Como todos los principios universales, solo se podía conocer con la mente, y así él se refirió a esto como "imaginario" (no, como diría Euler después, " imposible") Este dominio produjo artefactos tales como la raíz de -1, la cual plantea una paradoja porque nada en el mundo conocido produce una magnitud la cual, cuando se eleva al cuadrado produce -1. Leibniz llamo a la raíz de -1, "un recurso bueno y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio, algo entre el ser y el no ser".

A la paradoja le es indiferente que uno genere los poderes mediante la espiral o la hipérbola. En el caso de la espiral, la rotación angular sucesiva produce incrementos correspondientes en la longitud del radio de la espiral. Las longitudes se incrementan por el poder que corresponde a que tanto se incrementa el ángulo de rotación. Por ejemplo, si la rotación se duplica, la longitud del radio se cuadra. Si la rotación se triplica la longitud del radio se cubica. Si la dirección de la rotación se invierte, la longitud del radio decrece por el poder equivalente a la cantidad de rotación.

De manera similar con la hipérbola. Áreas iguales entre la hipérbola y la asíntota corresponde a incrementos geométricos en la longitud a lo largo de la asintota. Así, si el área se incrementa por dos, la longitud correspondiente a lo largo de la asíntota se cuadra. Si el área se incrementa por tres, la longitud correspondiente se cubica, etc. Si el área se reduce a la mitad, la longitud correspondiente se reduce por la raíz cuadrada, etc.

Así en la hipérbola las áreas cambian aritméticamente mientras que las longitudes cambian geométricamente. En la espiral, el ángulo cambia aritméticamente mientras la longitud cambia geométricamente. Los ángulos de la espiral, y las áreas de la hipérbola fueron llamados por Hugens, Leibniz y Bernoulli, logaritmos.

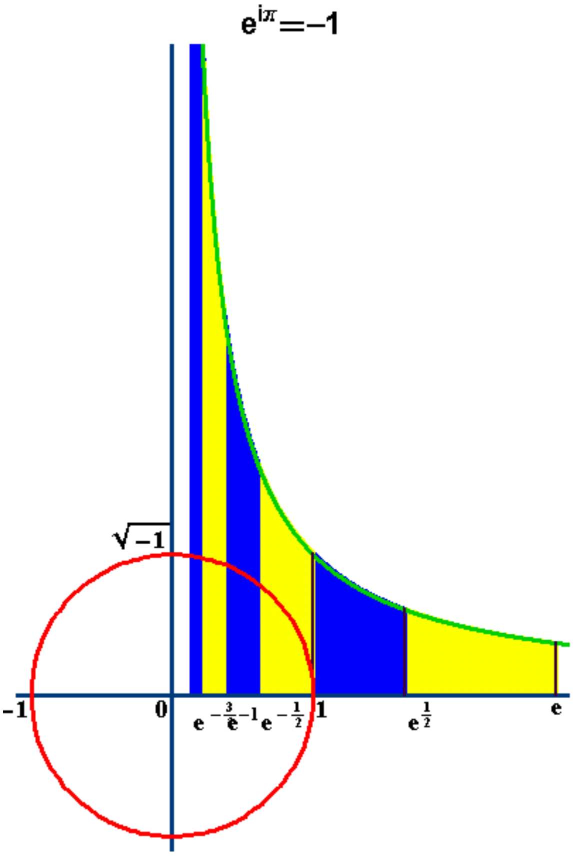
La paradoja planteada por Leibniz fue esta: Dado que el incremento, o decremento, en los logaritmos siempre produce una longitud positiva, "¿cuál es el logaritmo de un número negativo"? o en otras palabras, cual es el poder para producir la raíz de -1.

Esto provocó una disputa con Johann Bernoulli. Bernoulli sostenía que los logaritmos de los números negativos eran los mismos que los logaritmos de los números positivos. Por ejemplo el consideraba 0 por ser el logaritmo de 1 y -1, así como 1 y -1 son ambos la raíz cuadrada de 1. Leibniz por otro lado, reconocía que la misma acción no podía producir 1 y -1.

Para Leibniz, este asunto no podría ser resuelto en el dominio existente del formalismo matemático aceptado, tal como Gauss pudo demostrarlo en su investigación del teorema fundamental del álgebra. Los logaritmos de números negativos, insitito Leibniz, deben existir en un dominio mas allá de lo visible, i.e., el "imaginario" (no "imposible"). Sin embargo, Leibniz no logró completar este trabajo, y no fue hasta que Gauss desarrolló su concepto del dominio complejo que se resolvieron todas las implicaciones de las conjeturas de Leibniz.

En medio de este periodo, Euler, comentando sobre la disputa entre Leibniz y Bernoulli, desarrolló una demostración formal que indicaba que Leibniz, no Bernolulli, estaba correcto respecto a los logaritmos de los números negativos. De esto viene la famosa identidad de Euler, $e^{(\pi\sqrt{-1})} -1 = 0$, una fórmula que ha sido usada para torturar estudiantes y lavarle el cerebro a pensadores potenciales desde entonces. Para Euler, esto era solo un formalismo que no tenía otro significado real que la manipulación exitosa de símbolos de acuerdo a un conjunto regular de reglas. Innumerables víctimas han sido lavadas de cerebro tratando de encontrar un significado a este formalismo dentro del dominio de las matemáticas formales. Esto no es posible, porque la raiz de -1 no es posible en el dominio matemático formal de Euler, no importa cuantas veces se refiera a ella.

Sin embargo, si lo vemos desde el punto de vista de Leibniz, Huygens y Gauss podemos remover el misticismo asociado con la identidad de Euler y, usando el método de Cusa, trasformar lo finito en lo infinito, aclarando el asunto.



En la figura, las áreas alternantes de azul y amarillo son todas unidad de áreas. Si nos movemos a la derecha, áreas iguales corresponden a los logaritmos que producen poderes incrementantes de e. Por ejemplo, empezando en 1, (donde el logaritmo es 0 porque ninguna área a sido barrida) moviéndonos una unidad de área a la derecha incrementamos la longitud de 1 a e. Moviéndonos otra unidad de área incrementamos el logaritmos de de 1 a 2 y la longitud de e a e^2. Partiendo en dos el área entre 1 y e produces la longitud $\sqrt{e}$ o $e^{1/2}$.

Cuando nos movemos a la izquierda de 1, el principio de áreas iguales se mantiene, pero en la dirección opuesta. Las longitudes producidas por esas áreas son los inversos de aquellas producidas al movernos a la derecha. Por ejemplo, moviéndonos una unidad de área a la izquierda se produce la longitud 1/e. Moviéndonos dos unidades de área a la izquierda se produce $1/e^2$, etc.

La paradoja a la cual Lebniz se refería surge cuando uno trata de pensar como la hipérbola puede producir un logaritmo de un número negativo. Como se puede ver en el diagrama, moviéndonos a la derecha las longitudes se incrementan geométricamente, cuando nos movemos a la izquierda decrecen. Pero a causa de la naturaleza asintótica de la hipérbola, el área nunca puede producir una longitud sobre el otro lado de 0 .

Como puede verse en el diagrama, -1 es accesible, pero solo si la acción se aparta de la hipérbola y se mueve a lo largo de la trayectoria del círculo. Es decir, para producir un logaritmo de un número negativo tenemos que cruzar el límite infinito de Kepler entre la hipérbola y el círculo. La mitad del camino alrededor del círculo producirá una longitud de -1. Dividiendo esa acción a la mitad producirá, por lo tanto, la acción que corresponde a raíz de -1. Así el logaritmo de -1 puede ser pensado como una función de π y √-1.

Este asunto no se puede resolver excepto desde el punto de vista del dominio complejo de Gauss. Moviéndonos de izquierda a derecha en el dominio de la hipérbola se producen logaritmos negativos, pero no los logaritmos de los números negativos. Consecuentemente, se requiere un concepto superior que va mas allá de una acción simple de atrás para delante. Esto es exactamente lo que Gauss especificó como su dominio complejo.

Como lo estableció en su segundo tratado sobre residuos bicuadráticos: "Se pueden usar números positivos y negativos solo donde la entidad contada pose un opuesto, de tal manera que la unificación de los dos puede ser considerada como equivalente a su disolución. Juzgada de manera precisa, esta precondición es satisfecha solo donde las *relaciones* entre pares de objetos son las cosas contadas, en lugar de las substancias (por ejemplo objetos concebidos individualmente). De esta manera postulamos que los objetos están ordenados en alguna forma definida dentro de una serie, por ejemplo A, B, C, D… donde la relación de A a B puede considerarse como idéntica a la relación de B a C, etc. Aquí, el concepto de opuesto consiste de nada más que intercambio de miembros de la relación, de tal manera que si la relación de (o transición desde) A a B se toma como +1, entonces la relación de B a A debe ser representada por -1. De igual manera como la serie es ilimitada en ambas direcciones, cada número entero real representa la relación de un miembro elegido arbitrariamente, tomado como origen, para algunos otros miembros determinados en las series.

"Supongamos, sin embargo que los objetos son de tal naturaleza que no pueden ser ordenados en una serie única, aun si es ilimitada en ambas direcciones, sino que solo pueden ordenarse en una serie de series, o, en otras palabras, de una multiplicidad de dos dimensiones; si la relación de una serie a otra o la transición de una serie a otra ocurre en una manera similar como la descrita anteriormente para la transición de un miembro de una serie a otro miembro de la misma serie, entonces en orden de medir la transición de un miembro del sistema a otro, requeriremos en adición para las ya introducidas unidades +1 y -1 dos unidades opuestas adicionales +*i* y –*i*. Claramente, debemos también postular que la unidad *i* siempre significa la transición de un miembro dado a un *determinado* miembro de la serie inmediatamente adyacente. En esta forma el sistema estará doblemente ordenado en una serie de series."

En nuestro diagrama, la hipérbola esta determinando la acción en el dominio de los logaritmos de números positivos, mientras el circulo esta generando acción en el dominio "imaginario" donde residen los logaritmos de los números negativos. Si uno rota mentalmente la hipérbola perpendicular al círculo, como es su orientación en el cono, ya que no sería visible en nuestro diagrama. Desde esta visión, la hipérbola deviene "imaginaria" y el circulo "real".

El dominio complejo no es ni el dominio de lo "imaginario", ni de lo "real". Es el dominio de la posibilidad (potencial o poder) Como Riemann notó, es la metáfora eficiente de la cual surge "una armonía y regularidad que, de otra manera, permanecería oculta".

Para ver esto, ver de nuevo la armonía presentada en la discusión pedagógica previa (Riemann anti tontos No 36) (ver figura 6).

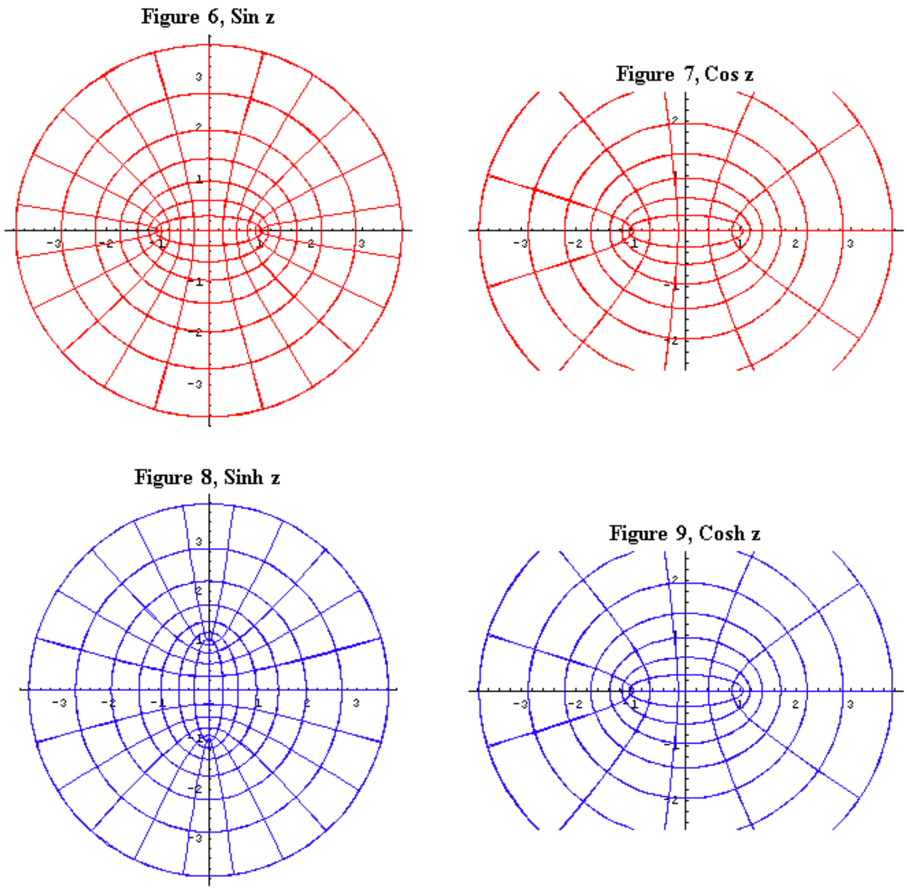


Figura 6

Cuando la catenaria se expresa en el dominio complejo, la hipérbola y el círculo (elipses) no son lados opuestos del infinito, sino que residen juntos, como una red unificada de trayectorias ortogonales de mínima acción en el dominio complejo.
Si escuchas cuidadosamente, podrías, en estas armonías ocultas, escuchar los ecos de los cuartetos de cuerdas tardíos de Beethoven.